様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　４ 年　 ６ 月 １０ 日現在

機関番号：１２６０５
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2021
課題番号：１６Ｋ０５０９２

研究課題名（和文）大域的F正則性，ファノ多様体とフロベニウス直像の有限性

研究課題名（英文）Global F-regularity, Fano variety and the finiteness of Frobenius direct images

研究代表者
原　伸生（Hara, Nobuo）

東京農工大学・工学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：９０２９８１６７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,400,000円

研究成果の概要（和文）：正標数の代数多様体とその特異点上の累次フロベニウス直像の構造について，F正則性，ファノ性，及び対数的端末特異点との関連性を踏まえつつ，有限F表現型（FFRT）の観点から考察し，以下の研究成果を得た．
1．（大川領氏との共同研究）正標数pの2次元正規次数環（擬斉次特異点）は，それが対数的端末特異点をもつ場合はFFRTをもつが，それ以外の場合，標数pに依存する例外を除きFFRTをもたない．
2．5次デルペッツォ曲面の反標準環のFFRT性について幾何的な手法で研究し，奇標数における階数3の自己双対的な直既約フロベニウス直和因子を見い出した．また，標数2,3においてはFFRT性が成り立つことを示した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究は，正標数p，すなわち素数pについて，任意の数をp回足すと0になってしまう世界で，多項式系の零点集合として定義される図形（代数多様体）の大域的および局所的な性質を研究するものです．正標数の数学は暗号符号などへの応用もありますが，本研究はこれらの応用と直接的には関係せず，正標数特有の時として奇妙にも映る現象の中に，純粋数学的な意義と美しさを見出して，これを探求するものです．

研究成果の概要（英文）：We studied the structure of iterated Frobenius direct images on algebraic varieties and their singularities in positive characteristic, from the viewpoint of the finite F-representation type (FFRT). Our results are as follows.
1. (joint work with Ryo Ohkawa) We studied the FFRT property of 2-dimensional normal graded rings (quasi-homogeneous singularities) in positive characteristic p using the method of algebraic stacks. We proved that a 2-dimensional normal graded ring has FFRT if it has a log terminal singularity; but it does not have FFRT otherwise, except for some exceptional cases depending on p.
2. We studied the FFRT property of the anti-canonical ring of a quintic del Pezzo surface X in positive characteristic. We constructed a self-dual indecomposable vector bundle of rank 3 that appears as a direct summand of self-dual Frobenius direct images on X. We have also shown that the anti-canonical ring has FFRT in characteristics 2 and 3.

研究分野：代数学

キーワード：正標数　フロベニウス直像　有限F表現型（FFRT）　2次元正規次数環　ファノ多様体　大域的F正則　デルペッツォ曲面　代数幾何

１．研究開始当初の背景

正標数 p の代数多様体或いはその特異点を研究する手段の一つとして，環の p 乗準同型であるフロベニウス写像を用いる方法が知られている．X を正標数 p の代数閉体上で定義された n 次元非特異代数多様体，$F: X \to X$ をそのフロベニウス射とするとき，X の構造層のフロベニウス直像 $F_* O_X$ は階数 p^n の局所自由層（ベクトル束）であるが，その構造（直和分解と直既約な直和因子の同型類など）は，X の幾何的な構造と密接に関係することが知られている．

２．研究の目的

本研究の目的は，正標数の射影多様体の構造層などの累次フロベニウス射による直像の構造について，その直既約な直和因子（Frobenius summand）の同型類の有限性－大域的有限 F 表現型（FFRT）－に注目しつつ，主として大域的 F 正則性とファノ多様体を中心に考察し，累次フロベニウス直像の構造と，ファノ性など標数にはよらない代数多様体の普遍的な性質との関係を明らかにすることである．また，累次フロベニウス直像の振る舞いに正標数特有の現象を見出すことにより，正標数の代数多様体の幾何に対する理解を深めていくことを目指している．

３．研究の方法

本研究の内容は純粋数学であり，研究方法は理論的考察及び机上の計算などを主として研究代表者が単独で行なうことによるものである．さらに必要に応じて，ごく少人数の共同研究者との相互訪問による研究打ち合せを行うことにより研究の進展を図り，正標数の代数幾何関係の研究者との研究集会の場における議論などを行い，研究遂行に必要な情報を得た．

４．研究成果

（1）2 次元正規次数付き環の有限 F 表現型に関する研究（大川領氏との共同研究）：本研究の発端は，Brenner 氏から発せられた次の疑問である：

問題（Holger Brenner，2007）正標数の体 k 上で定義された環 $R = k[x,y,z]/(x^2+y^3+z^7)$ は有限 F 表現型（FFRT）をもつか?

この問題の環 R は，射影直線 $\mathrm{P}^1=\mathrm{Proj}\ R$ 上の有理係数因子 $D = (1/2)(\infty) - (1/3)(0) - (1/7)(1)$ に対応する 2 次元正規次数付き環 $R(\mathrm{P}^1,D)$ として構成され，標数 2, 3, 7 においては FFRT をもつことが知られているが，本研究で得られた次の定理により，それ以外の標数 $p \neq 2,3,7$ においては FFRT をもたないことがわかる：

定理．正標数 p の代数閉体上の射影直線 P^1 上の豊富な有理係数因子 D に対し，$R = R(\mathrm{P}^1,D)$ とおく．2 次元正規次数付き環 R が対数的端末特異点をもたず，さらに，有理係数因子 D の各係数の分母が標数 p で割り切れないならば，R は有限 F 表現型をもたない．

一般に，非特異射影曲線 C 上の豊富な有理係数因子 $D = \sum_{i=1}^{m}(s_i/r_i)P_i$（$s_i$，$r_i$ は互いに素な整数で，$r_i > 0$）に対し，その“分数部分”を $D' = \sum_{i=1}^{m}((r_i-1)/r_i)P_i$ により定めるとき，2 次元正規次数付き環 $R = R(C,D)$ が対数的端末特異点をもつための必要十分条件は，標準因子 K_C と D' の和の次数が $\deg(K_C+D') < 0$ をみたすことであり，これが成り立つのは，$C = \mathrm{P}^1$ かつ D' の台が 3 点以下で，ちょうど 3 点の場合，その係数の分母に現れる r_i を並べ替えると $(2,2,n)\ (n \geqq 2), (2,3,3), (2,3,4), (2,3,5)$ のいずれかとなるときであり，この場合には，R は常に FFRT をもつことがわかる．一方，曲線 $C = \mathrm{Proj}\ R$ の種数が $g \geqq 1$ の場合には，R は常に FFRT をもたないことも示された．

以上の結果を示すために，曲線 C 上の有理係数因子 D の“分岐情報”を保存する 1 次元代数的スタック X とモジュライ射 $\pi: X \to C$ を考えると，この射による C 上の有理係数因子 D の引き戻し $L = \pi^* D$ が X 上では整数係数の因子（直線束）になることに着目し，(C,D) の代わりに (X,L) を考えることにより，有理係数因子の係数が整数でない場合の困難を回避するという着想が本研究のポイントである．この証明の過程において，Sun 氏の結果 [1] をスタックに拡張する次の定理が得られた（$\delta_X > 0$ という仮定は，非特異射影曲線において種数が 2 以上であるという条件に対応）：

定理．1 次元非特異 Deligne-Mumford スタック X が $\delta_X > 0$ をみたすとき，構造層の累次フロベニウス直像 $(F^e)_* O_X$ は安定であり，したがって直既約である．

（2）5 次デルペッツォ曲面の反標準環の有限 F 表現型に関する研究：X を正標数 p の代数閉体上で定義された非特異デルペッツォ曲面（i.e., 2 次元ファノ多様体）とし，その反標準因子

を $L=-K_X$ で表すとき，X の反標準環 $R(X,L)$ が有限 F 表現型（FFRT）をもつか，という問が本研究の出発点である．デルペッツォ曲面の次数 d（=(反)標準因子の自己交点数）が 6 以上の場合，X はトーリック曲面となり，この場合，反標準環 $R(X,L)$ が FFRT をもつことは既知であるので，$d=5$ の場合，すなわち，5 次デルペッツォ曲面の反標準環が本研究の対象である．

一般に，切断環 $R=R(X,L)$ が FFRT をもつことは，すべての非負整数 e と n にわたって累次フロベニウス直像 $(F^e)_*(L^n)=(F^e)_*O_X(-nK_X)$ を考えるとき，その直和分解に現れる直既約な直和因子の同型類が，L によるテンソル積を法として高々有限個であるという条件にいいかえられる．また，この有限性を示すためには，$0\leqq n\leqq q=p^e$ なる範囲にある n について条件を確認すればよいが，$L=-K_X$ の場合には双対性により，$0\leqq n\leqq (q-1)/2$ の範囲を確認すればよいことがわかる．研究代表者は，5 次デルペッツォ曲面に関する以前の研究 [2] において，上述の範囲の下限である $n=0$ の場合，すなわち，構造層の累次フロベニウス直像 $(F^e)_*O_X$ についてその直既約な直和因子を決定し，その同型類が高々有限個であることをみた．本研究においては，奇標数の場合に，上述の範囲 $0\leqq n\leqq (q-1)/2$ における累次フロベニウス直像 $(F^e)_*(L^n)$ の自由な直和因子の階数を計算し，さらに，この範囲の下限である $n=(q-1)/2$ の場合に累次フロベニウス直像の構造を決定した（プレプリント [3]）．

定理. X を奇標数 p の代数閉体上で定義された非特異デルペッツォ曲面とし，$L=-K_X$ とする．非負整数 e に対して $q=p^e$ とおくとき，次が成り立つ．

(1) $0\leqq n\leqq (q-1)/2$ のとき，累次フロベニウス直像 $(F^e)_*(L^n)=(F^e)_*O_X(-nK_X)$ は階数 $h^0(L^n)=5n(n+1)/2+1$ の自由層を直和因子にもつ．

(2) $n=(q-1)/2$ のとき，累次フロベニウス直像 $(F^e)_*(L^n)$ の直既約な直和因子の同型類は，構造層 O_X と，階数 3 で $h^0(\mathsf{F}_{1,1,1/2})=0$ の自己双対的な直既約ベクトル束 $\mathsf{F}_{1,1,1/2}$ の二つのみであり，その直和因子としての重複度はそれぞれ $(5q^2+3)/8$ と $(q^2-1)/8$ である．

上の定理 (2) における階数 3 の直既約ベクトル束 $\mathsf{F}_{1,1,1/2}$ は奇標数に特有のものであり，標数 2 においては存在しない．本研究においては，5 次デルペッツォ曲面の反標準環の FFRT 性について完全な結論を得ることはできなかったものの，定理の証明に用いた手法により，標数 $p=2$, 3 の場合については反標準環が FFRT をもつことが証明された．この 5 次デルペッツォ曲面の反標準環の FFRT 性に関する予想を肯定的に解決したとの連絡をごく最近 Devlin Mallory から受けている．Mallory 氏の証明法 [4] は（5 次デルペッツォ曲面が埋め込まれている）(2,5)-Grassmann 多様体の Cox 環の FFRT 性を用いるもので，本研究のように直和因子の同型類とその重複度まで込めて決定することはできないようである．

参考文献

[1] X, Sun, Direct images of bundles under Frobenius morphism, Invent. Math. 173 (2008), 427-447.

[2] N. Hara, Looking out for Frobenius summands on a blown-up surface of $\mathbf{P}^2$, Illinois J. Math. 59 (2015), 115-142.

[3] N. Hara, Self-dual Frobenius summands on a quintic del Pezzo surface, preprint 2019.

[4] D. Mallory, Homogeneous coordinate rings as direct summands of regular rings, preprint 2022.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Hara Nobuo、Ohkawa Ryo	４．巻 370
２．論文標題 The FFRT property of two-dimensional normal graded rings and orbifold curves	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Advances in Mathematics	６．最初と最後の頁 107215～107215
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.aim.2020.107215	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計7件（うち招待講演　6件／うち国際学会　1件）

１．発表者名 Nobuo Hara
２．発表標題 Self-dual Frobenius summands on a quintic del Pezzo surface
３．学会等名 OIST/RIMS Workshop: On the problem of Resolution of Singularities and Its Vicinity（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2019年

１．発表者名 原 伸生
２．発表標題 Frobenius summands on a quintic del Pezzo surface in positive characteristic
３．学会等名 研究集会「射影多様体の幾何とその周辺2019」（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 原 伸生
２．発表標題 Frobenius summands on a quintic del Pezzo surface in positive characteristic
３．学会等名 東京可換環論セミナー（招待講演）
４．発表年 2019年

1．発表者名
原伸生

2．発表標題
On Frobenius summands of graded rings

3．学会等名
代数学シンポジウム（招待講演）

4．発表年
2018年

1．発表者名
原 伸生

2．発表標題
The finite F-representation type of surface singularities via orbifold curves

3．学会等名
第5回 代数幾何研究集会ー宇部ー（招待講演）

4．発表年
2018年

1．発表者名
原 伸生

2．発表標題
Frobenius push-forwards on weighted projective lines and the FFRT property of surface singularities

3．学会等名
代数幾何ミニ研究集会（招待講演）

4．発表年
2017年

1．発表者名
Nobuo Hara

2．発表標題
Frobenius push-forwards on weighted projective lines and the FFRT property of surface singularities

3．学会等名
正標数セミナー

4．発表年
2016年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関