

令和 2 年 7 月 10 日現在

機関番号：13101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05094

研究課題名(和文) 準ガロワ点理論の展開 - 超曲面のデリケートな性質を扱うために -

研究課題名(英文) Development of Quasi-Galois Point Theory - To understand delicate properties of hypersurfaces

研究代表者

高橋 剛 (Takahashi, Takeshi)

新潟大学・自然科学系・准教授

研究者番号：60390431

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：代数関数体の内部構造についての考察方法を開発したいという動機から、射影的超曲面のガロア点が考察された。ガロア点理論の拡張となる新しい理論を求め、考察対象として「超曲面の準ガロア点」と「代数曲線の弱ガロア・ワイエルシュトラス点」というものを提案してきた。

三浦敬氏、深澤知氏との共同研究を行い、非特異平面代数曲線の準ガロア点の個数と分布について研究を進めた。特に、それまで得られていた証明の簡略化と結果の精密化を行った。米田二良氏との共同研究を行った。代数曲線の弱ガロア・ワイエルシュトラス点について、対象とする点の半群が2元生成という条件の下、それらの個数と分布を決定した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

平面曲線に対する準ガロア点について、論文を発表することができた。準ガロア点に関する結果は、ガロア点についての同様の結果よりも多様なものであった。射影的超曲面の性質を調べる上で、準ガロア点という新しい調査対象が有益であると期待されるが、今回の論文でその基本的な調査手法を提供することになった。

また、完備代数曲線に対して、ワイエルシュトラス半群が2元生成となるような弱ガロア・ワイエルシュトラス点の個数を決定することができた。完備代数曲線の自己同型を調べる上で弱ガロア・ワイエルシュトラス点は有効なものとなるが、その取り扱いの基本的な手法を提供できた。

研究成果の概要(英文)：Galois points for projective hypersurfaces were studied as a object for considering the internal structure of algebraic function fields. We want a new theory that is an extension of the Galois point theory, and study "quasi-Galois points of hypersurfaces" and "weak Galois-Weierstrass points of algebraic curves" as objects of consideration. By a joint research with Kei Miura and Satoru Fukasawa, we study the numbers and distributions of quasi-Galois points on nonsingular plane algebraic curves. In particular, we simplified the proofs obtained before and made the results better. By a joint research with Jiryo Komeda, we determined the numbers and distributions of weak Galois-Weierstrass points of complete algebraic curves under the condition that the semigroup of the target points is generated by two integers.

研究分野：代数幾何

キーワード：準ガロア点 ガロア点 弱ガロア・ワイエルシュトラス点 射影的超曲面 代数関数体 自己同型群  
ガロア理論

## 1. 研究開始当初の背景

吉原久夫氏(新潟大学)は関数体の内部構造を調べるという代数的視点の問題に対して、射影代数多様体の射影を調べるという幾何学的方法を打ち出して、射影空間内の代数超曲面に対してガロア点を定義した。ガロア点については、吉原氏、申請者、三浦敬氏(宇部高専)、深澤知氏(山形大学)を中心に着実に研究が進められてきた。そのような研究結果をもとに、ガロア点理論をさらに発展させようと、ガロア点の定義の一般化と理論の拡張が試みられた。申請者、三浦氏、深澤氏は、考察すべき新しい対象として、射影空間内の代数超曲面に対する「準ガロア点」を定義した。さらに、非特異平面曲線の準ガロア点について、基本的な定理を得ることができていた。また、申請者と米田二良氏(神奈川工科大学)は、考察すべき新しい対象として、完備代数曲線の「弱ガロア・ワイエルシュトラス点」を定義した。平面曲線のガロア点と、平面曲線の2重被覆曲線の弱ガロア・ワイエルシュトラス点との関係について、興味深い定理を得ていた。

## 2. 研究の目的

ガロア点理論を参考に、新しい考察対象である準ガロア点と弱ガロア・ワイエルシュトラス点について調べ、それら対象についての理論を展開することが本研究の大きな目的である。より具体的に述べると、射影空間内の代数超曲面に対する準ガロア点について、個数と分布、付随する群、具体例の典型的構成方法などを調べ、その性質を明らかにすることが一つ目の目的である。また、完備代数曲線の弱ガロア・ワイエルシュトラス点について、その個数と分布、付随するワイエルシュトラス半群、準ガロア点との関係について、その性質を明らかにすることが2つ目の目的である。

## 3. 研究の方法

射影空間  $\mathbf{P}^{n+1}$  内の代数超曲面  $X$  に対して、点  $P$  中心の射影  $\pi_P: X \rightarrow \mathbf{P}^n$  を考える。 $X$  の双有理自己同型群の部分群  $G[P] = \{ \sigma \mid \pi_P \circ \sigma = \pi_P \}$  の位数が2以上となるときに、点  $P$  は  $X$  に対する準ガロア点であるという。また、射影  $\pi_P$  から得られる関数体の自然な拡大  $K(X)/K(\mathbf{P}^n)$  のガロア閉包を  $L_P$  とするとき、ガロア群  $G_P = \text{Gal}(L_P/K(\mathbf{P}^n))$  を準ガロア点  $P$  に付随するガロア群と呼ぶ。まずは射影平面  $\mathbf{P}^2$  内の非特異曲線  $C$  に対して、以下のような研究を行う。

(1) 大きな自己同型群を持つ代数曲線に対して、コンピュータを用いて準ガロア点を求める計算を行い、準ガロア点について具体例を作成する。

(2) これまでに得られていた定理の改良をする。そのために、定理の証明を見直し簡略化を検討する。特に、 $G[P]$  の位数が3または2の場合について、準ガロア点の個数や分布を調査する。

(3) これまでに得られていた結果をまとめたプレプリント(深澤氏、三浦氏との共著)の構成を見直し、読みやすい論文にして投稿・出版する。

種数2以上の完備代数曲線  $C$  に対して、点  $P$  がワイエルシュトラス点であり、ある巡回ガロア被覆  $C \rightarrow \mathbf{P}^1$  の完全分岐点になるとき、 $P$  を弱ガロア・ワイエルシュトラス点という。また、 $P$  だけで極を持ちその他の点では正則となる有理関数全体を考えると、その関数の  $P$  での極の位数全部の集合はモノイドとなる。このモノイドのことを点  $P$  のワイエルシュトラス半群という。以下のような研究を行う。

(4) ワイエルシュトラス半群が2つの自然数で生成されるような弱ガロア・ワイエルシュトラス点の個数と分布を調べる。さらに、半群が2つの自然数で生成されるという条件より一般の条件において、弱ガロア・ワイエルシュトラス点の個数と分布を調べる。

(5) 非特異平面曲線のガロア点と弱ガロア・ワイエルシュトラス点の関係を調べた結果や手法を参考に、弱ガロア・ワイエルシュトラス点と準ガロア点の関係について調べる。

(6) 弱ガロア・ワイエルシュトラス点の個数と分布を調べた結果を応用して、3次元射影空間内の代数曲線に対するガロア直線について調べる。

#### 4. 研究成果

(1) 深澤知氏 (山形大学)、三浦敬氏 (宇部高専) との共同研究を行った。準ガロア点についてこれまで得られていた結果をまとめたプレプリント (深澤氏、三浦氏との共著) の構成を見直し、3部構成とする構想をたてた。第1部として論文を投稿し、出版に至った (Satoru Fukasawa, Kei Miura and Takeshi Takahashi, Quasi-Galois points, I: Automorphism groups of plane curves, Tohoku Math. J., 71 (2019), 487-494)。この論文では次のような内容を扱った。

- a) 準ガロア点の定義: 射影平面  $\mathbf{P}^2$  内の既約代数曲線  $C$  に対して、射影平面  $\mathbf{P}^2$  内の点  $P$  中心の射影を  $\pi_P: C \rightarrow \mathbf{P}^1$  としたとき、 $G[P] = \{\tau \in \text{Bir}(C) \mid \pi_P \circ \tau = \pi_P\}$  の位数が2以上となる場合、 $P$  を  $C$  に対する準ガロア点という。
- b) 平面曲線  $C$  と射影平面内の点  $P$  に対して、点  $P$  が extendable 準ガロアであるための判定条件。
- c) 非特異平面曲線  $C$  に対して、自然数  $n$  ごとに、 $G[P]=n$  となる準ガロア点に付随する自己同型全てが生成する群を  $G_n(C)$  とする。このとき、 $G_n(C)$  は  $C$  の自己同型群  $\text{Aut}(C)$  の正規部分群になる。
- d) 非特異平面曲線  $C$  の自己同型群  $\text{Aut}(C)$  の位数が偶数となると、 $C$  に対する準ガロア点が存在する。
- e) クライン4次曲線やウィーマン6次曲線では、 $\text{Aut}(C)=G_2(C)$  となる。
- f)  $d$  次フェルマー曲線  $F_d: X^n+Y^n+Z^n=0$  に対して、準ガロア点の個数と分布の決定。また、 $\text{Aut}(F_d)=\langle G_2(F_d), G_d(F_d) \rangle$  となること。

また、プレプリントで得られていた定理の証明を部分的に見直した。さらに、 $G[P]$  の位数が3の場合の内準ガロア点の個数と分布について、新しい結果を得た。

(2) ワイエルシュトラス半群が2つの自然数で生成されるような弱ガロア・ワイエルシュトラス点の個数と分布を決定した。

弱ガロア・ワイエルシュトラス点に関する概念の定義は次の通りである。種数2以上の完備代数曲線を  $C$  とする。次の二つの条件をみたすとき、点  $P \in C$  は弱ガロア・ワイエルシュトラス点であるという。

- 点  $P$  はある巡回ガロア被覆  $C \rightarrow \mathbf{P}^1$  の完全分岐点である。
- 点  $P$  はワイエルシュトラス点である。

弱ガロア・ワイエルシュトラス点の定義にある点  $P$  を完全分岐点とする巡回ガロア被覆  $C \rightarrow \mathbf{P}^1$  の次数すべての集合を  $\text{degGW}(P)$  として、これを弱ガロア・ワイエルシュトラス点の次数集合という。また、 $H(P)=\{n \mid C \text{ 上のある有理関数 } f \text{ で } (f)_\infty = nP \text{ となるものがある}\}$  を点  $P$  のワイエルシュトラス半群という。特に、弱ガロア・ワイエルシュトラス点  $P$  が  $\min(H(P) - \{0\}) \in \text{degGW}(P)$  となるとき、 $P$  はガロア・ワイエルシュトラス点であるという。

ワイエルシュトラス半群が2つの自然数で生成されるような弱ガロア・ワイエルシュトラス点の個数と分布に関する結果を論文にして出版した (Jiryo Komeda and Takeshi Takahashi, Number of weak Galois-Weierstrass points with Weierstrass semigroups generated by two elements, J. Korean Math. Soc. 56 (2019), 1463-1474)。主定理は以下の通りである。

**定理** 自然数  $a, b$  は互いに素であり、 $2 < a, a+1 < b$  であると仮定する。完備代数曲線  $C$  に対して次が成立する。

- a) もし、 $b \equiv a-1 \pmod{a}$  ならば、 $C$  の  $H(P)=\langle a, b \rangle$  となるガロア・ワイエルシュトラス点  $P$  の個数は0個もしくは  $b+1$  個である。
- b) もし、 $b \equiv a-1 \pmod{a}$  ではないならば、 $C$  の  $H(P)=\langle a, b \rangle$  となるガロア・ワイエルシュトラス点  $P$  の個数は0個もしくは1個である。
- c)  $C$  の  $H(P)=\langle a, b \rangle$  かつ  $b \in \text{degGW}(P)$  となるガロア・ワイエルシュトラス点  $P$  の個数は0個もしくは1個である。
- d)  $H(P)=\langle a, b \rangle$  かつ  $a, b \in \text{degGW}(P)$  となるガロア・ワイエルシュトラス点  $P$  を持つ代数曲線  $C$  は  $X^b=Y^aZ^{b-a}+Z^b$  に双有理同型である。

3次元射影空間  $\mathbf{P}^3$  内の完備代数曲線  $C$  に対して、 $\mathbf{P}^3$  内の直線  $L$  を考える。 $L$  中心の射影を  $\pi_L: C \rightarrow \mathbf{P}^1$  とする。この射  $\pi_L$  によって得られる関数体の拡大  $K(C)/K(\mathbf{P}^1)$  がガロア拡大となると、 $L$  は  $C$  に対するガロア直線であるという。 $C$  が種数4の6次非特異曲線の場合にガロア直線を求めるという問題に対して、上記の定理が応用可能であることを発見し、米田氏との共同研究により、部分的に問題を解くことができた。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Jiryo Komeda and Takeshi Takahashi	4. 巻 56
2. 論文標題 Number of weak Galois-Weierstrass points with Weierstrass semigroups generated by two elements	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of the Korean Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1463 - 1474
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hideo Kojima and Takeshi Takahashi	4. 巻 29
2. 論文標題 Log del Pezzo surfaces of rank one containing the affine plane	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Nihonkai Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 77-130
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Satoru Fukasawa, Kei Miura and Takeshi Takahashi	4. 巻 71
2. 論文標題 Quasi-Galois points, I: Automorphism groups of plane curves	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Tohoku Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 487-494
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Komeda Jiryo, Takahashi Takeshi	4. 巻 54
2. 論文標題 RELATING GALOIS POINTS TO WEAK GALOIS WEIERSTRASS POINTS THROUGH DOUBLE COVERINGS OF CURVES	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of the Korean Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 69-86
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4134/JKMS.j150593	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 4件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 高橋剛
2. 発表標題 Weak Galois-Weierstrass points with semigroups generated by two integers
3. 学会等名 射影多様体の幾何とその周辺2018 於高知工科大学永国寺キャンパス（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 高橋剛
2. 発表標題 種数4曲線のガロアラインについて
3. 学会等名 Workshop on Galois point and related topics 於新潟大学駅南キャンパスときめいと
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takeshi Takahashi
2. 発表標題 Number of weak Galois Weierstrass points with semigroup $\langle a, b \rangle$
3. 学会等名 The 16th Affine Algebraic Geometry Meeting（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takeshi Takahashi
2. 発表標題 Weak Galois Weierstrass points whose semigroups are generated by two integers
3. 学会等名 Geometric Galois Theory and Monodromy（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 高橋剛
2. 発表標題 ワイエルシュトラス半群が2元生成となる弱ガロアワイエルシュトラス点の個数について
3. 学会等名 10th Workshop on Galois point and related topics
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 高橋剛
2. 発表標題 平面代数曲線のガロア点と準ガロア点
3. 学会等名 新潟代数セミナー
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takeshi TAKAHASHI
2. 発表標題 On the number of Galois Weierstrass points whose semigroups are generated by two elements
3. 学会等名 The 15th Affine Algebraic Geometry Meeting (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	吉原 久夫  (Yoshihara Hisao)  (60114807)	新潟大学・自然科学系・名誉教授    (13101)	

## 6. 研究組織（つづき）

	氏名 (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	大瀨 朗 (Ohbuchi Akira)  (10211111)	徳島大学・大学院・ソシオ・アーツ・アンド・サイエンス研究部・教授  (16101)	
連携研究者	三浦 敬 (Miura Kei)  (50353321)	宇部工業高等専門学校・一般科・准教授  (55501)	
連携研究者	米田 二良 (Komeda Jiryo)  (90162065)	神奈川工科大学・基礎・教養教育センター・教授  (32714)	