様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　 ６ 月 ２２ 日現在

機関番号：３３９１０
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2019
課題番号：１６Ｋ０５１００

研究課題名（和文）正標数の代数多様体の特異点解消について

研究課題名（英文）On resolution of singularities of algebraic varieties in positive characteristic

研究代表者
川ノ上　帆（KAWANOUE, Hiraku）

中部大学・工学部・准教授

研究者番号：５０４６７４４５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：本研究においては正標数における代数多様体の特異点解消という問題を扱った．特異点解消は代数幾何学において大変重要な問題の一つであり，標数0の場合は広中平祐先生によって一般次元で存在することが示されているが，正標数の場合は未だ低次元の場合しか存在が知られていない．そこで本研究者はこの問題を解決するためにIFPというアプローチを導入し，Purdue大学の松木謙二氏と共同でこの研究を推進している．本研究期間においては，IFPを用いて曲面の埋め込み特異点解消について2種類の新しい証明を与えた．また未解決の3次元埋め込み特異点解消についても研究を進めた．

研究成果の学術的意義や社会的意義
この研究では本研究者が提案し推進しているIFPというアプローチを用いて曲面の特異点解消について新しい証明を与えた．この結果は2通りの意義がある．一つは，これが不変量の減少を見ることで特異点解消を確立する構成的な証明である点である．曲面の特異点解消の構成的な証明はこれまで知られていなかった．もう一つの意義は，一般次元の特異点解消の為のプログラムであるIFPの有効性を示したという点である．

研究成果の概要（英文）：The target of this research project is the problem of resolution of singularities. The problem of resolution of singularities is one of the most important problem in algebraic geometry. It is established in characteristic 0, in any dimension, due to Professor Heisuke Hironaka. However, it is still widely open in positive characteristic. we introduced the new approach, called IFP, to solve this important problem. I have developed IFP with the coworker Kenji Matsuki, a professor in Purdue university. During the period of this research project, we established two new proof for the resolution of singularities for surfaces, from the view point of IFP. We also have some new input for 3-fold case, though which is still work in progress.

研究分野：代数幾何学

キーワード：代数幾何学　特異点解消　IFP

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

本研究の主題は代数多様体の特異点解消である．代数多様体の点は，その点の近くで局所的にユークリッド空間のようにみなせるときに非特異であるといい，そうでないとき特異であると言う．例えば曲線なら尖点や自己交差を持つ点が特異点，接線を引ける点が非特異点である．特異点を持たない多様体を非特異多様体という．与えられた代数多様体に対して非特異多様体からの双有理固有射をその多様体の特異点解消と呼ぶ．非特異な代数多様体に対しては多くの幾何学的道具立てが機能するが，特異になった途端に振る舞いが制御しにくくなる．そこで，任意の代数多様体に対して特異点解消が存在するか否かを問う所謂特異点解消の問題は，代数幾何学において大変基本的かつ重要な問題と考えられている．

代数多様体は標数 0 の体上定義されるものと正標数の体上定義されるものに大別される．標数 0 の代数多様体に関しては 1964 年の廣中平祐先生の記念碑的な結果があり，任意次元の代数多様体が常に特異点解消を持つことが知られている．この定理はもはや代数幾何学における基盤の一つというべき有用性を誇っており,代数幾何学においては言うに及ばず,整数論や代数解析学,学習理論に至るまで幅広い応用がある．翻って正標数の場合は長年の未解決問題であり，特異点解消の存在については 3 次元まで(Abhyankar 氏, Cossart 氏-Piltant 氏)，特異点解消の精密化である埋め込み特異点解消の存在については 2 次元まで(Abhyankar 氏，廣中先生，Cossart 氏-Jannsen 氏-齋藤氏)しか知られていなかった．なおこの状況は現在でも変わっていない．正標数任意次元の特異点解消の問題は，広く知られ解決を希求される問題の一つであった．

以上が本研究開始当初の背景である．

２．研究の目的

本研究においてはこの正標数一般次元の特異点解消の問題の解決，あるいは解決に向けた進展を目的とした．より正確には，まず全四年間の研究期間のうち前半二年間を未解決の三次元代数多様体の埋め込み特異点解消の問題の解決の為の期間とした．この時点で知られていた最良の結果が三次元多様体の非埋め込み特異点解消であり，三次元埋め込み特異点解消は専門家たちの間で次に解決するべき問題の筆頭と目されていた為である．次に後半二年間は前半で成功していなければ三次元多様体の埋め込み特異点解消の研究を続け，首尾良く成功していた暁には前半の成果を拡張して一般次元の特異点解消の研究を進める為の期間とした．

一方で，IFP の中心的な道具である微分作用素に関する知見を生かせる問題として超平面配置に関する問題等も本研究の副次的な目的に含めた．この種の問題は特に期間を定めず主要目的に関する研究の空き時間に進めると言う計画であった．

以上が本研究の研究目的である．

３．研究の方法

申請者が正標数特異点解消の問題のために提唱し米 Purdue 大学の松木謙二氏と共同で発展させている Idealistic Filtration Program（IFP）を発展させる形で研究を進めた．以下 IFP について少し詳しく述べる．

標数 0 の場合の特異点解消は埋め込み特異点解消を経由して示されるが，その証明における鍵は最大接触超曲面と呼ばれるある種の非特異局所超曲面の存在にある．最大接触超曲面を介して標数 0 の場合の埋め込み特異点解消は全空間の次元に関する帰納法という枠組みにおさまり，非常にすっきりとした証明が得られる．ところが正標数下ではこの最大接触超曲面が常に存在するとは限らないので一見同様の証明は望むべくもない．そこで標数冪の先頭項を持つ特定の元達からなる先頭生成系という概念を導入する．先頭生成系の元が定める局所超曲面は一般に非特異とは限らないが，微分作用素との関係という観点からはこれらは標数 0 における最大接触超曲面と類似の性質を持つ．そこで先頭生成系を最大接触超曲面の代替物として用いることで標数 0 の場合と類似の証明を与えようというのが IFP の基本的な着想である．

最大接触超曲面の重要な性質である非特異性が保証されてない為標数 0 とは事情の異なるところも多く，これらの点を克服できない限りこの着想は画餅と帰す．後述の単項型における様相の違いなどもこのような現象の一例である．しかし，アルゴリズムの根幹に関わる爆発の中心の非特異性や単位となる不変量の上半連続性については成立することが確認でき，この設定下の具体的なアルゴリズムを与えることができる．以上が IFP の基礎部分についての概説である．

さて，IFP を適用することによって，任意の標数かつ任意の次元において特異点解消が単項型と呼ばれる特殊な状況における特異点解消に帰着することがわかる．標数 0 の場合は一旦単項型になればその後は単純な組み合わせ論的議論によって特異点解消を構成することができる．しかし正標数の場合の状況は未だそこまで単純ではなく，更なる解析が必要となる．そこで研究の焦点を単項型の場合に絞り，この場合に特異点解消を与える構成的な不変量を発見し，その不変

量から定まるアルゴリズムが特異点解消を与えることを示すという形での証明を目指す.

以上が本研究の研究方法である.

４．研究成果

当初の予想と異なり三次元多様体の埋め込み特異点解消は想像以上に難しく解決することはできなかった. しかし三次元の場合の研究の雛形となる曲面の埋め込み特異点解消について構成的な新しい証明を与え, 背景にある現象の解明に成功した. また未だ論文に纏めるには至っていないものの三次元の埋め込み特異点解消についても部分的進展を得た. 超平面配置に関しても, 本数の少ない直線配置を自由性の観点から分類する結果を得た. 以上の結果は 3 編の論文に纏めた. 以下に論文ごとに詳細を述べる.

第一の結果は論文 "Resolution of singularities of an idealistic filtration in dimension 3 after Benito- Villamayor"（本研究者-松木氏）に纏められている. これは曲面の埋め込み特異点解消についての論文である. 曲面の埋め込み特異点解消については幾つかのグループが証明に成功しているが, そのうち Benito 氏-Villamayor 氏による証明を大幅に簡易化し改良して議論の本質を抽出し, 単項型固有の振る舞いの良い不変量を定義して IFP の枠組内で実現したものである. 曲面の埋め込み特異点解消自体は既知のものであるが, 以下の意味で我々の結果は重要である. まず, 不変量を導入してその減少をみる構成的な証明としては初めてのものである. 標数 0 の場合は既に構成的な証明が知られているが, 正標数の曲面の特異点解消についてのこれまでの証明は全て背理法を用いる非構成的なものであった. 次に, これは IFP という任意次元で機能するプラグラムの実装の成功例としての意義があり, この結果を以って初めて IFP は実効性のあるアプローチとしての地位を確立したと言える.

第二の結果は論文 " A new strategy for resolution of singularities in the monomial case in positive characteristic"（本研究者-松木氏）に纏められている. これは曲面の特異点解消についての更なる探求が主題である. 上記の論文で確立した曲面の埋め込み特異点解消についての単項型における不変量は非常にうまく振る舞う反面, そのよい振る舞いを支える理論的背景は見出せなかった. 言わば職人技で奇跡的にうまくいく, という形であり, 高次元への一般化は望むべくもないという状況であった. そこでこの不変量を見直して意味づけがはっきりする新しい不変量を導入し, この不変量に従って曲面の埋め込み特異点解消の異なる証明を与えた. この不変量は短期的に見ると爆発に際して増加することもあるが, 長い目で見ると最終的には減少していくことが示せる. 新しい不変量は剰余重複度を組み込んで定義されているが, 剰余重複度が爆発に際して時に増加することは既に知られていた. 所謂 Moh-Hauser の跳躍現象である. Moh 氏がこの現象を発見して基礎的な結果を与え, Hauser 氏はこの現象が起こる状況とその後の振る舞いについて詳細な分析を行った. 我々は Hauser 氏による解析と類似の手法を用いて不変量の最終的減少の証明に成功した. なおここでは再び単項型にあることや爆発の中心が然るべき方法で指定されているという IFP の枠組が必要であることに注意をしておく. 実際, 一般の設定で点爆発だけを繰り返すならば剰余重複度が無限に増加する例があることが最近の Hauser 氏-Perlega 氏の仕事により知られている. 我々のこの結果は 2 次元の場合のより深い理解, 3 次元の場合への拡張という文脈上意義深いものである.

なお上記の結果に基づき 3 次元多様体の埋め込み特異点解消の解析も進めた. 我々が現在扱っている単項型用の不変量は例外因子を良い因子と悪い因子に分けた上で, それらの配置に基づいて場合分けして定める. 従って不変量がちゃんと機能するか否かを確かめるためにはそれぞれの配置における不変量が爆発による配置の遷移も込めて整合性を持って振る舞う様を解析する必要がある. この作業は曲面の場合は場合の総数が少なかったので比較的容易であったが, 3 次元の場合はかなり複雑である. また Moh-Hauser の跳躍現象の発生状況も 3 次元の場合は何種類か登場し, これも順調な解析を妨げる要因となっている. いくつかの配置については不変量を定義して期待できる振る舞いをすることを確かめているが, 全体の整合性を確認しないと機能するとは言えないので残念ながらこの部分は未だ発表できる段階にはない.

第三の結果は論文 "Non-recursive freeness and non-rigidity"（阿部氏-Cunz 氏-本研究者-野澤氏）に纏められている. これは複素 3 次元空間内の中心的自由平面配置を枚数が少ない場合に分類した結果である. より詳しく述べると次のようになる. まず, 13 枚からなる自由配置で再帰的自由でないものを構成した. このような例は今まで 27 枚のものしか知られていなかったので, 大幅に小さい例を与えたことになる. 更に, この例が最小枚数の例であること, すなわち 12 枚以下の自由配置は全て再帰的自由配置になることを示した. 最後に 12 枚以下の場合のうち帰納的自由配置でないものは同型を除いて 3 種類に分類されることを示した. 再帰的ではない自由配置の最小例を確立した点, 証明で扱っている手法が直線配置の新しい解析方法をあたえるものである点などがこの結果の意義である.

以上が本研究の研究成果である.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計3件（うち査読付論文　3件／うち国際共著　3件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Hiraku Kawanoue and Kenji Matsuki	４．巻 34(3)
２．論文標題 A new strategy for resolution of singularities in the monomial case in positive characteristic	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Rev. Mat. Iberoam.	６．最初と最後の頁 1229--1276
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） DOI: 10.4171/RMI/1023	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

１．著者名 Hiraku Kawanoue and Kenji Matsuki	４．巻 70
２．論文標題 Resolution of singularities of an idealistic filtration in dimension 3 after Benito-Villamayor.	５．発行年 2016年
３．雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	６．最初と最後の頁 115--214
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

１．著者名 Takuro Abe, Michael Cuntz, Hiraku Kawanoue and Takeshi Nozawa	４．巻 339
２．論文標題 Non-recursive freeness and non-rigidity	５．発行年 2016年
３．雑誌名 Discrete Mathematics	６．最初と最後の頁 1430～1449
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） DOI: 10.1016/j.disc.2015.12.017	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計1件（うち招待講演　0件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 川ノ上帆
２．発表標題 曲面の埋め込み特異点解消について
３．学会等名 日本数学会
４．発表年 2016年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考