

令和元年5月24日現在

機関番号：32665

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05101

研究課題名(和文) K3 曲面に含まれる曲線上の半安定束に対するブリル・ネーター理論とその周辺

研究課題名(英文) Brill-Noether theory for semi stable bundles on curves which are contained in a K3 surface and around the fields

研究代表者

渡邊 健太 (WATANABE, Kenta)

日本大学・理工学部・助教

研究者番号：70582683

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究において代表者は偏極 K3 曲面上の分解しない ACM 束の分類の観点から K3 曲面上の滑らかな曲線及び、その上の基点を持たないペンシルから構成される階数 2 の Lazarsfeld-Mukai 束の分解及び、安定性について幾つかの結果を得た。一方、曲線の 2 次クリフォード指数に寄与するある種の半安定束を構成する為、Hirzebruch 曲面の二重被覆で得られる K3 曲面における曲線の上の線形系について研究を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

代数曲面上の与えられた偏極に関するベクトル束の安定性や分解問題に付随した偏極代数曲面の表現型の決定に関する研究は環論・代数幾何学における興味深い話題である。ところが、K3 曲面をはじめとする多くの対象に対しそれらの問題は難しく、解決されていない部分が多い。しかしながら、偏極 K3 曲面上の階数 2 ACM 束は大域切断で生成されていれば Lazarsfeld-Mukai 束である為、本研究では問題をそのようなベクトル束に帰着させることで新しい着眼点を得ることができた。

研究成果の概要(英文)：In our research, the author obtained several results on the stability and the splitting of Lazarsfeld-Mukai bundles of rank two associated with smooth curves on K3 surfaces and base point free pencils on them in the point of view of the classification of indecomposable ACM bundles on polarized K3 surfaces. On the other hand, the author have studied linear systems on curves on a K3 surface which is given by a double covering of a Hirzebruch surface to construct a certain semistable bundles of rank two on curves which contribute to the second Clifford indices of them.

研究分野：代数幾何学

キーワード：安定 ACM 束 Lazarsfeld-Mukai 束 Mercat 予想 Weierstrass 半群

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

(1) 完備非特異曲線の研究においてその上の有理型関数の存在性を介して、曲線の分類問題に関する研究は古来より行われてきた。曲線上の基点を持たない線形系は高い次元の射影空間への正則写像を定義する。従って、それらを調べる事により、これまで曲線の射影空間における振る舞いの記述に関する研究が行われてきた。また、同様に曲線上の大域切断で生成されたベクトル束も Grassman 多様体への有理写像を定義することから近年、古典的な Brill-Noether 理論を曲線上のベクトル束へ拡張する試みがある。特に、最近では曲線の古典的な不変量の一つであるゴナリティと関係の深い直線束の Clifford 指数と高い階数のベクトル束の Clifford 指数を比較する研究が盛んに行われている。曲線  $C$  上の階数  $n$  の半安定ベクトル束  $E$  の Clifford 指数は直線束に対する古典的な Clifford 指数(以下  $\mu_C$ )と同様、 $E$  のスロープ  $\mu$  と大域切断のなすベクトル空間の次元  $r$  により決まる値である。従来同様、 $\mu, r$  に関して然るべき数値的条件を満たす階数  $n$  の半安定束の Clifford 指数の最小値を  $C$  の階数  $n$  の Clifford 指数と言って  $\text{Cliff}_n(C)$  で表す。一般に任意の自然数  $n$  に対し、 $\text{Cliff}_n(C)$  は非負である。また、それは  $\mu_C$  で抑えられており、両者が一致することが予想されてきた (Mercat 予想  $M_n$ )。しかしながら、近年この予想に対する多くの反例が高種数の曲線を中心に挙がっている。例えば、曲線の種数を  $g$ 、ゴナリティを  $k$  としたとき、 $g > 4k-4$  ならば  $M_2$  は正しいが、 $g > 11$  に対しては  $\mu_C$  より小さい Clifford 指数をもつ階数 2 の安定ベクトル束を有する種数  $g$  の曲線  $C$  が存在することが Farkas と Ortega により知られている。一方、 $n=3$  の場合では Lange, Mercat, Newstead らが種数 9 と 11 の一般の曲線上で 6 つの線形独立な切断をもつ階数 3 の半安定ベクトル束を構成することで  $M_3$  に対する反例を与えている。しかし、具体的にどのような場合に  $M_n$  が成立するかはまだ殆ど知られていなかった。

(2) 代数多様体上のベクトル束は中間次数のコホモロジーが消えている時、ACM であると言う。与えられた偏極によって多様体  $X$  を射影空間へ埋め込んだ時、環の表現論において  $X$  上の ACM 束は  $X$  の斉次座標環を係数とする極大 CM 加群に対応している。これにより、分解しない ACM 束の成す族を調べる事で偏極多様体の表現型を調べる研究が盛んに行われている。一般に射影空間上の分解しない ACM 束は直線束に限られる (Horrocks)。また、射影空間における 2 次超曲面上の分解しない ACM 束はスピノル束及び、その超平面切断から決まる直線束による捻りに同型なものに限られることが知られている。特に、三次元射影空間  $P^3$  における 2 次超曲面上の任意の ACM 束は分解する (Knörrer)。しかしながら、 $P^3$  における 3 次以上の超曲面上には分解しない高い階数の ACM 束が存在する。従って、超曲面あるいは一般に偏極代数曲面上の分解しない ACM 束を調べる問題は興味深い。Casanellas と Hartshorne は各自然数  $n$  に対して  $P^3$  の三次超曲面上の特定のチャーン類を持つ階数  $n$  の分解しない安定 ACM 束の  $n^2+1$  次元族を構成した。しかしながら、一般の偏極代数曲面上の ACM 束を完全に調べるのは難しく  $P^3$  の 4 次以上の超曲面でさえ未解決であった。

### 2. 研究の目的

(1) Mercat 予想  $M_n$  に対する反例の多くは  $K3$  曲面上で非特異曲線  $C$  とその上の基点を持たない線形系から構成される Lazarsfeld-Mukai 束 (後で説明する) の安定性やそれを  $C$  上へ制限して得られるベクトル束の半安定性を用いて構成されている。また、 $M_2$  が成立する場合の証明にも  $K3$  曲面上における曲線上の安定ベクトル束のなす Brill-Noether 軌道の幾何学的性質に関する記述が用いられている。従って、本研究ではそれらを踏まえた上でこれまでに行ってきた  $K3$  曲面上の曲線の古典的な Clifford 指数を計算する直線束の記述や適当な断面種数をもつ偏極  $K3$  曲面上の ACM 直線束の数値的特徴づけなどを用いて  $K3$  曲面上に乗っている曲線のうちのどれくらいが Mercat の条件  $M_n$  を満たすかを調べるのが目的であった。特に  $n=2$  の場合は前述の通り、階数 2 の半安定束に関する予想  $M_2$  は曲線の種数がゴナリティに比べて十分大きいときに正しい事がわかっている。本研究ではそこで与えられている曲線の種数とゴナリティに関する評価式 (Lange-Newstead) の精密化を図るのが目標であった。

(2) 代数曲面上の与えられた偏極に関するベクトル束の安定性や ACM 束の分解問題に付随した偏極代数曲面上の表現型を決定する問題は環論・代数幾何学において興味深いテーマである。一方、向井氏による  $K3$  曲面上の安定ベクトル束のモジュライ空間の幾何学的記述は  $K3$  曲面上に乗っている非特異曲線上の安定ベクトル束に対する Brill-Noether 理論と深いかわりがあり、代数曲線の分類問題において重要な役割を果たしている。 $K3$  曲面上の与えられた偏極に関する分解しない ACM 束を調べる為、本研究の準備段階としてこれまでに 3 次元射影空間における 4 次超曲面の超平面切断等、比較的小さい断面種数を持つ偏極  $K3$  曲面上の直線束が ACM になる為の必要十分条件が得られていた。しかしながら、 $K3$  曲面をはじめとする小平次元が非負の代数曲面上の高い階数の ACM 束の分解問題に関する結果は少ない。一般に、ACM 直線束の拡張で得られるベクトル束は ACM であり、逆に高い階数の ACM 束は直線束の直和に分解すればその直和因子は ACM である。従って、本研究ではこれまでの研究を踏まえて特に  $K3$  曲面上の任意の偏極に関する ACM 直線束の分類を完成させた後、高い階数の分解しない ACM 束を分類するのが目的であった。

### 3. 研究の方法

(1)  $X$  を  $K3$  曲面、 $C$  を  $X$  上の非特異曲線、 $Z$  をその上の基点を持たない直線束とする。このとき、 $Z$  の大域切断の空間による評価写像の核として  $X$  上のベクトル束が得られる。その双対として得られるベクトル束を  $E_{\{C,Z\}}$  と書き、 $C$  と  $Z$  に付随した Lazarsfeld-Mukai 束 (以下 LM 束と書く) という。一般に高い階数の Brill-Noether 理論において Mercat 予想の反例を与える場合、しばしば  $E_{\{C,Z\}}$  の  $C$  への制限として得られるベクトル束の半安定性を調べることがある。しかし、 $C$  の種数と  $Z$  が決める線形系の次数と次元に関する Brill-Noether 数が非負のとき、 $E_{\{C,Z\}}$  はどのような飽和部分層を含むかわからない。しかし、 $Z$  がゴナリティペンシルで、 $C$  の種数と  $Z$  の次数から決まる Brill-Noether 数が負のとき  $E_{\{C,Z\}}$  の一次チャーン類  $c_1=0_X(C)$  が非常に豊富ならば  $E_{\{C,Z\}}$  は  $c_1$  に関する有効な ACM 直線束を含む事がわかっている (Donagi-Morrison)。これを踏まえて本研究ではまず、Brill-Noether 数が非負の場合も含め、 $E_{\{C,Z\}}$  の飽和部分層を調べる事を考えた。具体的にはこれまでに行ってきた  $K3$  曲面上の ACM 直線束の Hilbert 多項式による特徴づけを用いて LM 束の飽和部分層を分類することで LM 束の slope 半安定性を調べることを始めた。当初は半安定な階数 2 の LM 束を曲線上へ制限し、曲線上の階数 2 の半安定束に対する Mercat 予想の反例を探す事で前述の Lange-Newstead の評価式がどこまでシャープかを調べるのが目標であったが、その方法では曲線の 2 次 Clifford 指数に寄与する階数 2 のベクトル束を構成することが困難であったため、当初予定していた研究計画を変更した。

(2) 三次元射影空間  $P^3$  における 4 次超曲面をはじめ、 $K3$  曲面上の与えられた偏極に関する高い階数の ACM 束の直線束への直和分解は一般に期待できない。しかしながら、高い階数の ACM 束は ACM 直線束の拡張を繰り返すことによって構成できるため、本研究では特にそのような方法で得られる階数 2 の ACM 束の特徴づけを行うことに着目した。当初  $P^3$  における 4 次超曲面上の ACM 直線束の Hilbert 多項式を用いた特徴づけを行っていたが、まずその結果を偏極が大きい断面種数を持つ場合に拡張することを試みた。一般に  $K3$  曲面上の与えられた偏極に関する階数 2 の ACM 束は大域切断で生成されるとき、適当な曲線とその上の基点を持たないペンシルから決まる LM 束になる。逆に階数 2 の LM 束はその一次チャーン類  $c_1$  が非常に豊富なとき、 $c_1$  に関して ACM であることがわかっている。ACM 束は与えられた偏極で十分多く捻ることによって大域切断により生成されるので、階数 2 の ACM 束が直線束の拡張で得られるかという問題は階数 2 の LM 束の場合に帰着される。これまでの研究において階数 2 の LM 束が直線束の拡張で表されるための必要条件が得られている。本研究ではこのことを踏まえた上で当初予定していた問題へのアプローチを試みた。

### 4. 研究成果

(1) 当初の研究計画に基づいてまず、 $K3$  曲面上の非特異曲線の二次 Clifford 指数に関する予想  $M_2$  に対する反例について吟味した。本研究では階数 2 の LM 束の半安定性を調べる為、一先ず slope 半安定でない階数 2 の LM 束  $E$  の不安定化部分層が  $c_1(E)$  に関して ACM であることを  $c_1(E)$  の断面種数が 9 以下の場合に示した。この結果は現在投稿中である。一方、 $M_2$  を  $P^3$  の 4 次超曲面として得られる非常に一般的な楕円  $K3$  曲面上の曲線に対して調べるため、その様な 4 次超曲面の滑らかな超平面切断とその上の基点を持たないペンシルから決まる階数 2 の LM 束が安定になるための必要十分条件を示した (雑誌論文)。しかしながら、構成した半安定な階数 2 の LM 束を曲線上へ制限しても曲線の二次 Clifford 指数に寄与するベクトル束をうまく構成することはできなかった。一般に曲線  $C$  の 2 次 Clifford 指数に寄与する階数 2 のベクトル束  $E$  はその一次チャーン類  $L:=c_1(E)$  に対する次数  $(p,1)$  ( $p>0$ ) の Koszul コホモロジー  $K_{\{p,1\}}(L)$  の元に対応することが知られている。特に  $p=1$  のとき曲線  $C$  は  $K_{\{1,1\}}(L)$  の元のシチジーとして得られる 2 次超曲面へ埋め込まれる。そこで、高次元の射影空間における二次超曲面への埋め込みを与える曲線上の線形系の例を構成する為、以前行っていた二重被覆型の Weierstrass 半群の計算に着目した。具体的には Hirzebruch 曲面の二重被覆として得られる  $K3$  曲面がその上の曲線に誘導する二重被覆の分岐点における Weierstrass 半群を計算した (雑誌論文)。しかしながら、この計算で目的の線形系を得るには至らなかった。

(2) まず、前述の  $P^3$  の 4 次超曲面上の ACM 直線束の分類を踏まえて任意の偏極に関する  $K3$  曲面上の ACM 直線束の Hilbert 多項式による特徴づけを行った。具体的には偏極に比べて十分大きい自己交点数を持つ直線束  $L$  が ACM となる為の必要十分条件を  $L$  の次数及び、自己交点数を用いて特徴付けた (雑誌論文)。これは前述の  $P^3$  における 4 次超曲面の場合の結果を含んでいる。一方、これを元に  $P^3$  の 4 次超曲面上の階数 2 の ACM 束の分類を試みた。これについては 4 次超曲面が射影的 normal な次数 6 種数 3 の曲線を含む非常に一般的な場合に着手したが、研究期間中に Gianfranco Casnati (引用文献) により目標としていた結果が得られたことがわかった為、一度研究を中断した。Gianfranco 氏のアイデアは考えている 4 次超曲面のピカル数が 2 であることにより regularity の条件から初期化された階数 2 の ACM 束のチャーン類を分類するという方法であった。そこで、本研究では同様の方法で  $P^3$  に

おける 4 次超曲面として得られる非常に一般的な楕円 K3 曲面(ピカール数 2)上の階数 2 の ACM 束をその一次チャーン類を用いて大雑把に特徴づけた(学会発表)。一方、偏極 K3 曲面上の ACM 直線束の拡張で得られる分解しない階数 2 の ACM 束の特徴づけを行う目的で前述のとおり階数 2 の LM 束の直線束への分解に関する研究を行った。本研究では階数 2 の LM 束 E を定義する曲線上のペンシルが ambient space である K3 曲面上の楕円曲線の制限で与えられる場合に E が直線束の拡張で得られる為の十分条件を与えた(雑誌論文)。なお、以前出版した論文 “On the splitting of Lazarsfeld-Mukai bundles on K3 surfaces, Journal of Algebra, vol.447, 445-454, 2016” において一部誤りがあった為、雑誌論文 においてその部分を訂正した。

#### <引用文献>

Gianfranco Casnati, Rank two aCM bundles on general determinantal quartic surfaces in  $P^3$ , ANNALIDELL ' UNIVERSITA ' DIFERRARA, vol.63, Number 1, pp 51-73, 2016

#### 5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計4件)

Kenta Watanabe, On the splitting of Lazarsfeld-Mukai bundles on K3 surfaces II, Journal of Algebra, vol.518, 129-145, 2019, 10.1016/j. jalgebra. 2018. 09. 042, 査読あり

Kenta Watanabe, ACM line bundles on polarized K3 surfaces, Geometriae Dedicata, 1-15, 2019, 10. 1007/s10711-019-00436-2, 査読あり

Kenta Watanabe, A double covering of curves on a Hirzebruch surface of degree one and Weierstrass semigroups, Smigroup Forum, vol.98, 422-429, 2018, 10.1007/s00233-018-9970-1, 査読あり

Kenta Watanabe, Unstable Lazarsfeld-Mukai bundles of rank 2 on a certain K3 surface of Picard number 2, Advances in Algebra, vol.11, 7-17, 2018, <http://www.rpublication.com/aa.ht>, 査読あり

[学会発表](計6件)

渡邊 健太, 偏極 K3 曲面上の階数 2 ACM 束の分類と Lazarsfeld-Mukai 束について, 東京農工大学東小金井キャンパス, 農工大数学セミナー(招待講演)2019年3月25日~3月26日

渡邊 健太, On the classification of rank two ACM bundles on quartic hypersurfaces in  $P^3$ , 九州大学伊都キャンパス ウエスト1号館 中講義室 W1-C-515, Splitting construction and stability of vector bundles and their applications (招待講演), 2018年6月20日~6月21日

渡邊 健太, 偏極 K3 曲面上の ACM 直線束について, 東京大学, 日本数学会 2018 年度会, 2018年3月18日~3月21日

渡邊 健太, 次数 1 の Hirzebruch 曲面上の曲線の二重被覆と Weierstrass 半群について, 日本大学理工学部, 第 15 回代数曲線論シンポジウム (招待講演), 2017年12月16日~12月17日

渡邊 健太, K3 曲面上のある種の分解しない Lazarsfeld-Mukai 束の例, 首都大学東京南大沢キャンパス, 日本数学会 2017 年度会, 2017年3月24日~3月27日

渡邊 健太, ピカール数 1 の K3 曲面上の曲線に対する階数 2 の Mercat 予想について, 北海道教育大学札幌駅前サテライトキャンパス, 第 4 回 K3 曲面・エンリケス曲面ワークショップ(招待講演), 2016年10月10日~10月12日

#### 6. 研究組織

(1) 研究協力者

研究協力者氏名: 米田 二良

ローマ字氏名: (KOMEDA, Jiryo)

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。