

令和 2 年 6 月 9 日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05102

研究課題名(和文) 良い頂点彩色を持つ凸多面体及び多様体の単体分割の研究

研究課題名(英文) Triangulations of polytopes and manifolds with nice coloring structure

研究代表者

村井 聡 (Murai, Satoshi)

早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授

研究者番号：90570804

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では balanced と呼ばれる良い彩色構造を持つ単体分割の組合せ構造に関する研究を行った。主要な研究成果は次の通りである。

- [1] Balanced単体分割の面の個数の下限に関するNovikとKleeの予想を肯定的に解決。[2] スタンレー・ライスナー環のレフシェッツ性に関する研究を行い、(1,1,1)-balancedと呼ばれる仮定の下では環がレフシェッツ性を持ち、(2,1)-balancedと呼ばれる仮定の下ではレフシェッツ性は必ずしも成り立たないことを明らかにした。[3] 閉曲面のbalanced単体分割の5角形変形に関するIzmestiev-Klee-Novikの問題を解決。

研究成果の学術的意義や社会的意義

凸多面体や多様体の単体分割の組合せ構造の研究は組合せ論の分野における重要な研究テーマの一つである。一方、四色定理に代表される彩色の研究も数学における重要な研究テーマである。本研究では、これら二つのテーマの両方に関連する研究である、良い彩色構造をもつ単体分割の代数的・組合せ論的な構造に関する研究を行った。

今回の研究により、面の個数の下限・スタンレー・ライスナー環のレフシェッツ性・単体分割を変形によって構成する手法、などに関して未解決であった問題を解決することに成功し、単体分割の代数構造・組合せ構造の解明に貢献した。

研究成果の概要(英文)：In this research, we study combinatorial structures of triangulated manifolds having a nice coloring structure, called balanced. Here are main achievement.

- [1] We give an affirmative answer to the conjecture of Novik and Klee on lower bounds of the face numbers of balanced triangulated manifolds. [2] We show that any (1,1,1)-balanced 3-polytope has the Lefschetz property with respect to a colored linear system of parameters, while (2,1)-balanced 3-polytopes do not always have this property. [3] We solve a problem posed by Izmestiev, Klee and Novik, on pentagon moves for balanced triangulated surfaces.

研究分野：Algebraic Combinatorics

キーワード：単体的複体 彩色 スタンレー・ライスナー環 単体分割 凸多面体 レフシェッツ性

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

凸多面体や多様体の単体分割の組合せ構造の研究は組合せ論の分野における重要な研究テーマの一つである。一方、四色定理に代表される彩色の研究も数学における重要な研究テーマである。Richard Stanley は balanced 単体的複体と呼ばれる非常に良い彩色構造を持つ単体的複体を考案し、これらの単体的複体の組合せ構造を代数的に研究する手法を発展させた。

近年、単体的複体が多様体の単体分割になっている場合の組合せ構造の研究に注目が集まっている。特に、2016年に Steven Klee と Isabella Novik は多様体の単体分割で balanced であるものに関して、幾つかの解決すべき問題を提案した。本研究では、彼らの提唱した問題の一つである、balanced generalized lower bound inequality と呼ばれる、凸多面体や多様体の単体分割の面の個数の下限を与える不等式について研究を行った。

2. 研究の目的

「研究開始当初の背景」で紹介した、balanced generalized lower bound inequality と呼ばれる不等式に関する研究が本研究の主な目的である。研究開始時の時点で、この不等式は研究代表者の研究により凸多面体の場合に成り立つことが証明されていたが、これを様々な形に一般化することを目指した。特に、本研究では次の2点を具体的な目標とした。

【問題 A】 Balanced generalized lower bound inequality を多様体の単体分割の場合に一般化すること。

【問題 B】 Balanced generalized lower bound inequality を、a-balanced と呼ばれるより弱い彩色条件の場合に拡張すること。

3. 研究の方法

【問題 A】、【問題 B】ともに、これらの問題はスタンレー・ライスナー環と呼ばれる環に関する代数的な性質と深い関わりがある事が知られており、環の代数的性質に関する研究と、その組合せ論への応用を考察することで研究を進めた。

【問題 A】に関しては、多様体の単体分割のスタンレー・ライスナー環はブックスバウム環と呼ばれる環になるが、ブックスバウム環に関する代数的な性質の研究が重要な役割を果たした。特に、研究代表者により以前に考案された、多様体の単体分割に関する重要な組合せ論的不変量である h'' -列と呼ばれる不変量を環のヒルベルト関数として記述する方法と、組合せ論的な不等式である balanced generalized lower bound inequality との関係性を明らかにすることで、予想解決への手法を模索した。

【問題 B】に関しては、a-balanced と呼ばれる彩色条件を持つ凸多面体を考えた時に、そのスタンレー・ライスナー環の 0 次元化がレフシェッツ性と呼ばれる代数的な性質を持つことを示すことが証明の鍵になると考えられていた。そのため、このレフシェッツ性に関する問題を、まずは低次元の凸多面体の場合に計算機による計算も用いながら多くの具体例を計算することで状況を解析し、問題解決の糸口をつかむ、という方針で研究を行った。

4. 研究成果

本研究による主要な研究成果は以下の通りである。

- (1) Martina Juhnke-Kubitzke 氏, Isabella Novik 氏, Connor Sawaske 氏らとの共同研究により、研究代用者が以前考案していたブックスバウム環と h'' -列の関係を応用することで、一次元面の個数の場合に、balanced generalized lower bound inequality を多様体の単体分割に対して一般化することに成功した。加えて、代数的 g -予想と呼ばれる代数的組合せ論における重要な未解決問題が正しいと仮定すると、balanced generalized lower bound inequality が一般の多様体の単体分割に対して拡張できることを発見した。代数的 g -予想は正しいことが広く信じられている予想であり、これは問題解決へ大きな進展をもたらす結果である。
- (2) David Cook II 氏, Martina Juhnke-Kubitzke 氏, Eran Nevo 氏らとの共同研究により、a-balanced な凸多面体のレフシェッツ性に関して、 $(1, 1, 1)$ -balanced である場合にはレフシェッツ性を持つが、 $(2, 1)$ -balanced である場合には必ずしもレフシェッツ性が成り立たないことを発見した。問題の完全な解決には至らなかったが、この研究結果は、balanced

generalized lower bound inequality の a -balanced な場合へ一般化するためには、既存の手法の拡張だけでは不十分であることを示唆するものであり、この研究により本問題を解決するためには全く新しい手法の導入が必要であることが明らかとなった。

- (3) 新潟大学の鈴木有祐氏との共同研究により、閉曲面の balanced 単体分割に関する cross flip と呼ばれる操作についての研究を進め、閉曲面の任意の二つの balanced 単体分割が有限個の例外を除いて五角形変形と呼ばれる簡単な操作の繰り返しで移り合うことを発見した。これは、balanced 単体分割に関して、全く予想されていなかった興味深い新しい性質であり、今後、より高い次元への一般化などの後続研究が進むことが期待される。また、同時に、Izmestiev-Klee-Novik らによって提唱された、平曲面のすべての単体分割を cross flip で変形するには五角形変形は必ず必要になる、という予想を証明することにも成功した。本研究では、単体的複体研究における問題を、グラフ理論研究における手法を用いて解決したもので、今後、グラフ理論研究の手法の単体的複体研究の更なる応用を期待させる研究となった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 10件 / うち国際共著 7件 / うちオープンアクセス 10件）

1. 著者名 Jennifer Biermann, Hernn de Alba, Federico Galetto, Satoshi Murai, Uwe Nagel, Augustine O'Keefe, Tim Romer, Alexandra Seceleanu	4. 巻 560
2. 論文標題 Betti numbers of symmetric shifted ideals	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Algebra,	6. 最初と最後の頁 312 ~ 342
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2020.04.037	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Satoshi Murai	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Betti tables of monomial ideals fixed by permutations of the variables	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Transaction of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1090/tran/8159	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Juhnke-Kubitzke Martina, Miro-Roig Rosa M., Murai Satoshi, Wachi Akihito	4. 巻 146
2. 論文標題 Lefschetz properties for complete intersection ideals generated by products of linear forms	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 3249 ~ 3256
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1090/proc/14009	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Kusunoki Takuya, Murai Satoshi	4. 巻 23
2. 論文標題 The Numbers of Edges of 5-Polytopes with a Given Number of Vertices	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Annals of Combinatorics	6. 最初と最後の頁 89 ~ 101
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1007/s00026-019-00417-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Klee Steven、Murai Satoshi、Suzuki Yusuke	4. 巻 35
2. 論文標題 Exceptional Balanced Triangulations on Surfaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Graphs and Combinatorics	6. 最初と最後の頁 1361-1373
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1007/s00373-018-2001-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Juhnke-Kubitzke Martina、Murai Satoshi、Sieg Richard	4. 巻 61
2. 論文標題 Local h-Vectors of Quasi-Geometric and Barycentric Subdivisions	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Discrete & Computational Geometry	6. 最初と最後の頁 364 ~ 379
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1007/s00454-018-9986-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Murai Satoshi、Novik Isabella	4. 巻 222
2. 論文標題 Face numbers and the fundamental group	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Israel Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 297 ~ 315
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1007/s11856-017-1591-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Murai Satoshi、Suzuki Yusuke	4. 巻 146
2. 論文標題 Balanced subdivisions and flips on surfaces	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical society	6. 最初と最後の頁 939 ~ 951
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1090/proc/13775	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Juhnke-Kubitzke Martina, Murai Satoshi, Novik Isabella, Sawaske Connor	4. 巻 289
2. 論文標題 A generalized lower bound theorem for balanced manifolds	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Mathematische Zeitschrift	6. 最初と最後の頁 921~942
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1007/s00209-017-1981-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 David Cook II, Martina Juhnke-Kubitzke, Satoshi Murai, Eran Nevo	4. 巻 48
2. 論文標題 Lefschetz properties of balanced 3-polytopes	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Rocky Mountain Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 769~790
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計9件 (うち招待講演 4件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 村井 聡
2. 発表標題 凸多面体の面の個数に関するあれこれ
3. 学会等名 第3回数理新人セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Satoshi Murai
2. 発表標題 h-vectors and the number of generators of fundamental groups
3. 学会等名 New Trends in Syzygies (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 村井 聡
2. 発表標題 基本群の生成元の個数と単体分割の辺の数
3. 学会等名 変換群論における幾何・代数・組み合わせ論
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 村井 聡
2. 発表標題 多様体の単体分割の持つ組合せ論的・代数的対称性
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Satoshi Murai
2. 発表標題 Face numbers and the fundamental group
3. 学会等名 2017 CMS Winter Meeting (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 村井 聡
2. 発表標題 多様体の単体分割の組合せ論と代数
3. 学会等名 第63回トポロジーシンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 村井 聡
2. 発表標題 Face numbers of balanced simplicial polytopes and complexes
3. 学会等名 第38回可換環論シンポジウム
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Satoshi Murai
2. 発表標題 A duality of Buchsbaum rings and triangulated manifolds
3. 学会等名 Asymptotic Phenomena in Local Algebra and Singularity Theory (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 村井 聡
2. 発表標題 凸多面体の面の数え上げ論の近況
3. 学会等名 2017年日本数学会年会 (招待講演)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

研究代表者webページ
<http://www.f.waseda.jp/s-murai/>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----