

令和 2 年 7 月 11 日現在

機関番号：31302

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05104

研究課題名(和文) 代数曲線族の不変量並びに特異点に関連する高次元連分数の研究

研究課題名(英文) Studies on invariants of fibrations of curves and multidimensional continued fractions related to singularities

研究代表者

足利 正 (Ashikaga, Tadashi)

東北学院大学・工学部・教授

研究者番号：90125203

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：多重分数の剰余写像と切り下げ写像の反復合成を基に、ある非可換多項式として新しい高次元連分数を定義した。さらに、2次元巡回商特異点のHirzebruch-Jung解消と古典連分数の関係を、3次元以上の巡回商特異点のFujiki-Oka解消とこの連分数の関係に拡張した。非超楕円的種数3のファイバー芽のHorikawa指数による分類問題については、種数3の安定曲線の群作用の分類とEichler跡公式の拡張、局所符号不足数のDedekind和表示等を用いて、実質計算としては完了した。ただ現時点でまた論文の完成には至っておらず、その努力を続けている。

研究成果の学術的意義や社会的意義

古典連分数が純粋及び応用数学に幅広い応用を有している事を考えると、我々の高次元連分数も特異点のみならず将来的には広い分野に応用されることが期待される。

ファイバー芽の不変量の問題は、元々一般型代数曲面の地誌の問題から出発したとも言えるのでこの方面への応用を持つのは当然であるが、レフシェッツ束などの低次元トポロジーとも深い関係にあり、これらを通して応用が広がることが期待される。

研究成果の概要(英文)：Based on the iterations of remainder and round-down maps of multi-fractions, we defined a new type of multidimensional continued fraction as a certain non-commutative polynomial. Moreover, we extended the relation among the Hirzebruch-Jung resolution of 2-dimensional cyclic quotient singularities and the classical continued fractions to the relation among the Fujiki-Oka resolution of higher-dimensional cyclic quotient singularities and our multidimensional continued fractions. With respect to the classification problem of the fiber germs of non-hyperelliptic fibrations of genus 3 via their Horikawa indices, our calculation was finished by using the classification of automorphisms of stable curves of genus 3, an extension of Eichler's trace formula and the expression of the local signature defect via the Dedekind sum. Although the paper about it is not yet completed, and we are making efforts on it.

研究分野：代数幾何

キーワード：曲線族 特異点 局所不変量 連分数 オービフォールド 一般型曲面 堀川指数 符号数

1. 研究開始当初の背景

(1) 高次元連分数に関しては、2015 年の単著論文において以下のような概念や主要道具を準備していたという背景がある。すなわち

- ① 半ユニモジュラー錐に対する Oka 細分から生じるトーリック双有理写像に着目し、2 次元の場合にはこの合成が古典連分数と Hirzebruch-Jung 解消の対応を導くこと、
- ② 多重分数とその間の剰余写像並びに切り下げ写像の概念や、Oka 双有理写像によってオービフォールド符号数がどのように変動するかを観察していたこと、

Dedekind 和に関する Zagier 相互律の拡張が Oka 細分を通じて導かれることが示されていたこと、等である。

(2) Horikawa 指数に関しては、長年の間に必要な道具立や有用な概念を準備していたという背景がある。すなわち

- ① 2001 年の石坂瑞穂氏との共著論文において、Matsumoto-Montesinos の定理を用い、負型擬周期写像を経由して種数 3 の退化ファイバー芽の位相型を分類していたこと、
- ② 2007 年の今野一宏氏との共著論文で局所符号数を経由して Horikawa 指数を研究する方向性を示していたこと、

2009 年の吉川謙一氏との共著論文において、奇数種数の半安定なファイバー芽の局所符号数を、Deligne-Mumford コンパクト化上の Harris-Mumford 符号数因子の引き戻しから導く方法を示していたこと、

- ④ 2010 年の単著論文において局所符号不足数の概念を提示し、古典連分数を経由する Dedekind 和公式から、この不変量の Nielsen-Matsumoto-Montesinos 量を用いた明示公式を得ていたこと、等である。

2. 研究の目的

(1) 次の役割を有する新しい高次元連分数を提唱すること、すなわち

- ① 古典連分数と 2 次元巡回商特異点に関する Hirzebruch-Jung 解消との対応が、この高次元連分数と 3 次元以上の巡回商特異点解消との対応に拡張されていること、
- ② 古典 Dedekind 和を古典連分数を用いて表す Myerson-Holzapfel 公式が、高次元 Fourier-Dedekind 和のこの高次元連分数を用いた表記に拡張されていること、

2 次体の基本単数の古典連分数による表記が、3 次以上の代数体の基本単数のこの高次元連分数による表記に拡張されていること、等である。

(2) 曲線族のファイバー芽の Horikawa 指数をモジュライ写像の特性から研究すること、特に

- ① 非超楕円の種数 3 のファイバー芽を Horikawa 指数によって分類すること、またこれにより Castelnuovo 直線に地誌的に近い一般型曲面の幾何をこの観点から考察すること、
- ② 奇数種数のファイバー芽の Horikawa 指数を、Harris-Mumford 因子のモジュライ写像による引き戻しと局所符号不足数を組み合わせることで明示的に研究する方法を開拓すること、等である。

3. 研究の方法

(1) Hirzebruch-Jung 解消の高次元化の一つとして注目されるのは、藤木明氏(1974)が提唱し、岡陸雄氏(1986)がトーリック的記述を与えた Fujiki-Oka 解消である。これは背景欄でも触れたように、半ユニモジュラー錐の自然な細分と解釈でき、その反復合成が多重ユークリッド互除法のアルゴリズムに対応し、このアルゴリズム進行状況の記録を剰余多項式並びに切り下げ多項式と呼ぶ二つの非可換多項式の中に収めることができる。

より詳しく述べると、細分を行う中心の座標の動きが剰余多項式の中に、各プロセスで生成される例外集合の特定の成分の数値的情報(例外曲線の成分の自己交点数が拡張されたもの)が切り下げ多項式の中に記録される。これを 2 次元巡回商特異点に適用すれば、その解消プロセスは Hirzebruch-Jung 解消に一致し、上記二つの非可換多項式は Hirzebruch-Jung 連分数のデータになるという意味で、この方法はこれらの拡張になっている。

特に 3 次元巡回商特異点の場合は、精密に例外集合の情報を取り出すことができると同時に、解消の各プロセスのオービフォールド Todd 種数への寄与を明示的に書き下すことができる。このことから、古典 Dedekind 和のもっとも単純な多変数版の拡張である次数 0 の 3 次元 Fourier-Dedekind 和については、この連分数を用いた表記が可能となり、これは Myerson-Holzapfel 公式の一つの拡張と見ることができる。

(2) 目的欄中の(2)①について述べる。背景欄中の(2)①による種数 3 の退化ファイバー芽の位相型の各分類項目について Horikawa 指数を決めたい。もしファイバー芽のモジュライ点がモジュライ空間上の超楕円跡に属さない場合は、基本的に背景欄中の④と②の方法のみでクリアできるので、以下属すると仮定する。この時、背景欄中の で記した符号数因子の寄与の明示計算をいかに行うかが問題である。

そのために、これを安定還元で生じる安定曲線の倉西族とその上の巡回群作用の問題に帰着させる。もしこの安定ファイバーが非特異なら Eichler 跡公式の若干の精密版からクリアでき

るので、特異安定曲線であると仮定する。この場合、倉西族の6個のパラメーターの中でどれが超楕円方向の変形を与えるかを個々の分類項目に応じて確定し、その方向へのこの群作用の指標の計算から目的の量を取り出すことが我々の方法である。

目的欄中の(2)②についてはアプローチの方向のみがあって具体化されていない。

4. 研究成果

(1) 目的欄に掲げた項目別に述べる。

①については方法欄で述べた方法で Fijiki-Oka 解消と我々の高次元連分数との対応が付き、業績欄に記した論文で発表した。

②については、次数0の3次元 Fourier-Dedekind 和の場合には方法欄で述べた方法により目的の拡張が出来て、上記と同じ論文中に発表した。これを次元や次数をさらに拡張するには、解消の各プロセスごとの特性類の変動項に対するより広範囲な記述が必要であるが、それには至っていない。

については、本期間中には解決を見ず、現在もある方法を用いて研究中である。

(2) 目的欄中の①については、方法欄中の(2)に示した方法に従って研究を行い、任意の場合について計算が完了した。ただこのままでは長過ぎることもあって、まだ正式論文が起こせていない。本質的な部分のみを取り出して議論をコンパクトにまとめ、発表に漕ぎ着けたいと思っている。なお本期間中、①に時間を投入し過ぎたこともあり②には至っていない。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Tadashi Ashikaga	4. 巻 59
2. 論文標題 Multi-dimensional continued fractions for cyclic quotient singularities and Dedekind sums	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Kyoto J. Math.	6. 最初と最後の頁 993-1039
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1215/21562261-2019-0032	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計12件（うち招待講演 12件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 足利正
2. 発表標題 Analytic structures and moduli maps of degenerations of curves
3. 学会等名 倉西正武先生を囲む複素2次元特異点勉強会・伊豆（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 足利正
2. 発表標題 Orbifold moduli maps of degenerations of Riemann surfaces
3. 学会等名 リーマン面に関連する位相幾何学研究集会（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 足利正
2. 発表標題 The space of orbifold moduli maps of degenerations of Riemann surfaces
3. 学会等名 北海道大学幾何学コロキウム（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 足利正
2. 発表標題 退化代数曲線族のオービフォルドモジュライ写像とタイヒミュラー構造
3. 学会等名 代数幾何学ミニワークショップ (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tadashi Ashikaga
2. 発表標題 The space of orbifold moduli maps of degenerations of curves
3. 学会等名 Workshop: Toric geometry, degenerations and related topics (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tadashi Ashikaga
2. 発表標題 The space of orbifold moduli maps of degenerations of curves
3. 学会等名 Workshop on Topology of singularities (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 足利 正
2. 発表標題 Castelnuovo-Horikawa index of genus three via signature divisor
3. 学会等名 第13回代数幾何解析セミナー (鹿児島大学会場) (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 足利 正
2. 発表標題 Horikawa index of non-hyperelliptic genus three fibration
3. 学会等名 Seminar on Algebraic Surfaces (at Dalian Univ. of Tech.) (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 足利 正
2. 発表標題 Horikawa index of genus three via signature divisor
3. 学会等名 Mini workshop "Fibered Varieties" in honor of Prof. M. A. Barja (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 足利 正
2. 発表標題 Log Eichler trace formula and hyperelliptic multiplicity
3. 学会等名 代数幾何学ミニワークショップ (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 足利 正
2. 発表標題 Horikawa index of genus 3 and hyperelliptic multiplicity
3. 学会等名 研究集会「代数曲線と曲面及びその周辺」(招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 T. Ashikaga
2. 発表標題 Horikawa index of genus three via signature divisor
3. 学会等名 Seminar on Algebraic Geomtry (招待講演)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----