

令和 4 年 6 月 21 日現在

機関番号：32606

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2021

課題番号：16K05105

研究課題名(和文)カラビ・ヤウ多様体の退化とミラー対称性

研究課題名(英文) Degenerations of Calabi-Yau manifolds and mirror symmetry

研究代表者

細野 忍 (Hosono, Shinobu)

学習院大学・理学部・教授

研究者番号：60212198

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：理論物理学における弦理論の研究から、カラビ・ヤウ多様体という特別な多様体に関心が集まり、1990年代に「ミラー対称性」という不思議な対称性が発見されています。以降、この対称性の数学的解明に向けた研究が精力的に行われて、今では圏論的なアプローチの方法と幾何学的なものとの2つの方法から研究が進められています。本研究では、カラビ・ヤウ多様体の族とその退化の様子を、周期積分と呼ばれる積分の振舞いを通して調べる手法を整備して、ミラー対称性の解明に向けて具体的でかつ興味深い事例を構築して研究の発展に寄与しました。

研究成果の学術的意義や社会的意義

カラビ・ヤウ多様体のミラー対称性は、その発見から30年近くが経過し、関連する数学の分野に多数の影響を与えてきました。しかしながら、対称性の数学的の完全な理解には至っておらず、現在も不思議な対称性と思われています。このような対称性が現れる興味深いカラビ・ヤウ多様体を構成することは、ミラー対称性を深く理解する上で大切な役割を果たします。また、具体的な例を構築すると同時に、それらを調べる手段・方法を整備して確立することは、ミラー対称性の解明に限らず、派生する様々な数学の問題への応用に寄与するもので、数学の大切な蓄積となります。

研究成果の概要(英文)：From the study of string theory in theoretical physics, certain special manifolds, called Calabi-Yau manifolds, were attracted attentions of many researchers, and around 1990, a mysterious symmetry called "mirror symmetry" was discovered in world of Calabi-Yau manifolds. Since the discovery of the mirror symmetry, extensive study toward mathematical understanding of the symmetry has been done. Now, we have two approaches to study the symmetry; one is categorical and the other is geometric method. In this research project, PI has made achievements in constructing explicit and interesting Calabi-Yau manifolds aiming to reveal mirror symmetry. These have been done by developing necessary methods to analyze behavior of some integral called period integral.

研究分野：複素幾何学

キーワード：カラビ・ヤウ多様体 ミラー対称性 周期積分 モジュライ空間 多変数超幾何微分方程式

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

理論物理学における弦理論の研究に端を発して、複素3次元カラビ・ヤウ多様体の幾何学が関心を集めている。1990年頃に発見されたカラビ・ヤウ多様体のミラー対称性は、弦理論の研究から発見されたとても不思議な対称性で、微分幾何学、複素多様体の幾何学、代数幾何学等の従来の枠組みでは捉えられない対称性であることが知られている。発見以来、その解明に向けて理論物理学と数学の2つの視点から研究の蓄積がなされて、対称性の背景にはとても豊富な数学が含まれていることが認識されている。現在、ミラー対称性を理解する数学的なアプローチとして、1. SYZ 構成法と呼ばれる微分幾何的なアプローチ、2. トーリック退化と呼ばれる退化を基点に代数幾何学的に取り扱うアプローチ、3. カラビ・ヤウ多様体に備わる2つの全く性質の異なる導来圏の性質として理解するアプローチ、以上の3つが有力な方法として知られている。一方で、具体的なカラビ・ヤウ多様体を構成して、そこに現れるミラー対称性を観察すると、3つのアプローチが交錯して現れ、そこに多くの興味深い数学の事象が観察される。このような、具体的な事象からミラー対称性の解明への手がかりが得られると期待され、特徴的なカラビ・ヤウ多様体に関心が持たれていた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、具体的でさらに特徴的なカラビ・ヤウ多様体を構成し、そこに現れるミラー対称性を詳細に描き出すことを通して、カラビ・ヤウ多様体のミラー対称性の数学的解明に向けて着実な事象の蓄積を行うことを目的とした。

3. 研究の方法

研究はカラビ・ヤウ多様体を多数構成し、それらの性質を深く観察するという非常に具体的な方法によって行った。いったい、どのようなカラビ・ヤウ多様体が、どれ程存在するのかという問題は、1次元、2次元カラビ・ヤウ多様体の場合は十分よく分かっていることであるが、ミラー対称性が特に興味深い3次元の場合には一般的な手がかりがないと言ってよい状況にある。そこで、トーリック多様体、射影空間やグラスマン多様体など、古典的な多様体を基にしてカラビ・ヤウ多様体を構成し、それらの性質を詳しく調べた。特に、これまでの研究で、ミラー対称性が周期積分のモノドロミー性質に反映することが分かっているので、周期積分とそれが満たす微分方程式を手がかりにした。また、現れる微分方程式は、フック型の微分方程式と呼ばれるものであるが、多変数微分方程式でありその解析の手法も知られていない事柄が多く、解の構成に必要な解析手法を新たに構築しながら研究を遂行した。

また、カラビ・ヤウ多様体の研究は、理論物理学と数学両側面から研究されており、研究者は欧米やカナダ始め、中国、香港、台湾などの多数の国の大学・研究機関に在籍している。これらの研究者を招へいしたり、あるいは国際研究集会に出席して、これらの研究者に向けた研究成果の発信と活発な討論を行いながら研究を遂行した。

4. 研究成果

上述のような目的で、ミラー対称性の視点から興味深い性質を持つカラビ・ヤウ多様体を構成することを行った。その結果、(1) 完全交叉型の3次元カラビ・ヤウ多様体で、ミラー対称性とカラビ・ヤウ多様体の双有理幾何学を結び付ける、大変興味深い現象を見つけることが出来た。また、(2) 周期積分の満たす微分方程式の解析をしていて、青本-ゲルファント系と呼ばれる一連の微分方程式系に至り、その1例である $E(3,6)$ 系について詳細な解析を実施し、この場合に変数空間の大局で完全な記述をすることが出来た。これらの例を通して、微分方程式の大局的性質がミラー対称性の下で、カラビ・ヤウ多様体の双有理幾何学と結びつく様子を具体的に示すことが出来、特に既存の数学との接点を具体的に捉えることが出来た。

以下に(1),(2)の結果について詳細を補足することにする。

(1) カラビ・ヤウ多様体 X に対するミラー対称なカラビ・ヤウ多様体を Y とするとき、これらがミラー対称であることは、それぞれの族の退化に反映して現れる。カラビ・ヤウ多様体 X の族に関しては、 X のケーラー構造の退化、他方、 Y の族に関してはホッジ構造の退化を考えると、ミラー対称性はこれらの退化の関係として現れる。本研究では、完全交叉型のカラビ・ヤウ多様体

ウ多様体を系統的に構成して、そこに現れるミラー対称性を観察した。その結果、いくつかの特徴的な完全交叉型カラビ・ヤウ多様体で、その族を大局的に作ってみると、ホッジ構造の退化に現れるモノドロミー冪零錐と呼ばれる錐が自然に貼り合っって大きな錐を作る様子を観察することが出来た。この大きな錐の対応物をミラー対称の世界で探してみると、ケーラー錐が貼り合っって大きな錐をなすという双有理幾何で知られている可動錐に一致することが見つけられた。カラビ・ヤウ多様体の族の大局的な解析が、ミラー対称性とうまく融合することを示す良い事例と言える。

(2) カラビ・ヤウ多様体の族の退化は、周期積分の退化として捉えることが出来る。周期積分の満たす微分方程式系から見ると、そのような退化は変数空間のコンパクト化における境界点(無限点)において現れる。従って、ミラー対称性が出現する「よい」変数空間のコンパクト化を見つけ出すことが問題となる。このような観点から、射影空間の二重被覆として得られるカラビ・ヤウ多様体に着目した。この場合に現れる微分方程式系は、青本-ゲルファント系と呼ばれる多変数超幾何微分方程式で与えられる。2次元カラビ・ヤウ多様体(K3曲面)の場合に変数空間のコンパクト化を具体的に調べ、そのコンパクト化がモジュラ形式の研究で現れるIV型対称領域のコンパクト化に、とても綺麗に対応する様子を詳細に記述して示すことが出来た。その結果として、ミラー写像をテータ関数を用いて表す簡明な表示を得ることが出来た。この結果は、古典的なルジャンドル族に付随して現れる楕円ラムダ関数をK3曲面に自然に拡張するもので、ミラー対称性の視点から離れて見ても、大変興味深い結果である。3次元の場合の解析は格段に難しくなるが、3次元の場合に「よい」変数空間のコンパクト化がどのように実現するか、という問いについて考察するために良い事例を提供していると思われる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Shinobu Hosono, Bong Lian, Hiromichi Takagi, S.-T. Yau	4. 巻 4
2. 論文標題 K3 surfaces from configurations of six lines in P2 and mirror symmetry I.	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Commun. in Number Theory and Phys.	6. 最初と最後の頁 739-783
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 S. Hosono, B.H. Lian and S.-T. Yau	4. 巻 17
2. 論文標題 K3 surfaces from configurations of six lines in P2 and mirror symmetry II-- K3 -functions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 13231-13281
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/imrn/rnz259	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 S. Hosono and H. Takagi	4. 巻 60
2. 論文標題 Derived categories of Artin-Mumford double solids	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Kyoto J. Math.	6. 最初と最後の頁 107--177
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 S. Hosono and H. Takagi	4. 巻 47
2. 論文標題 Mirror Symmetry and Projective Geometry of Fourier-Mukai Partners	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advanced Lectures in Mathematics	6. 最初と最後の頁 89--130
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shinobu Hosono and Hiromichi Takagi	4. 巻 14
2. 論文標題 Movable vs monodromy nilpotent cones of Calabi-Yau manifolds	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 14 (2018), Paper No. 039, 37 pp.	6. 最初と最後の頁 039, 37pages
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3842/SIGMA.2018.039	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Shinobu Hosono and Hiromichi Takagi	4. 巻 317
2. 論文標題 Towards homological projective duality for \mathbb{P}^3 and \mathbb{P}^4 .	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Adv. in Math.	6. 最初と最後の頁 371--409
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2017.06.039	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shinobu Hosono and Hiromichi Takagi	4. 巻 60
2. 論文標題 Derived Categories of Artin-Mumford Double Solids	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Kyoto J. Math.	6. 最初と最後の頁 107-177
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shinobu Hosono and Hiromichi Takagi	4. 巻 104
2. 論文標題 Double Quintic Symmetroids, Reye Congruences, and Their Derived Equivalence	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Journal of Differential Geometry	6. 最初と最後の頁 443--497
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/jdg/1478138549	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計15件(うち招待講演 15件/うち国際学会 11件)

1. 発表者名 S. Hosono
2. 発表標題 Movable vs Monodromy nilpotent cones in mirror symmetry of Calabi-Yau manifolds
3. 学会等名 International Workshop on Derived Categories and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 S. Hosono
2. 発表標題 K3 analogues of the elliptic lambda function from a double cover family of K3 surfaces
3. 学会等名 Interaction Between Algebraic Geometry and QFT (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shinobu Hosono
2. 発表標題 K3 surfaces from configurations of six lines in P^2 and mirror symmetry
3. 学会等名 Categorical and Analytic Invariants in Algebraic Geometry VI (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shinobu Hosono
2. 発表標題 Double cover family of K3 surfaces and mirror symmetry
3. 学会等名 Workshop on Mirror Symmetry and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shinobu Hosono
2. 発表標題 Double cover family of K3 surfaces and mirror symmetry
3. 学会等名 Special Seminar at CMSA, Harvard University (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shinobu Hosono
2. 発表標題 Mirror symmetry and birational geometry of CICYs
3. 学会等名 The 99th Encounter between Mathematics and Theoretical Physics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Shinobu Hosono
2. 発表標題 Movable vs monodromy nilpotent cones in mirror symmetry of Calabi-Yau manifolds
3. 学会等名 Categorical and Analytic Invariants in Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Shinobu Hosono
2. 発表標題 GKZ hypergeometric systems in mirror symmetry of CICY manifolds
3. 学会等名 Master Lectures --The Legacy of Carl Friedrich Gauss (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Shinobu Hosono
2. 発表標題 Movable vs monodromy nilpotent cones of Calabi-Yau manifolds
3. 学会等名 Focus Semester on Homological Mirror Symmetry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shinobu Hosono
2. 発表標題 Gluing monodromy nilpotent cones of a family of K3 surfaces
3. 学会等名 Department of Mathematics, Harvard University, USA (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shinobu Hosono
2. 発表標題 Birational geometry from the moduli spaces of mirror CICs
3. 学会等名 Modular Forms in String Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Shinobu Hosono
2. 発表標題 Birational geometry from the moduli spaces of mirror CICs
3. 学会等名 Categorical and Analytic invariants IV (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Shinobu Hosono
2. 発表標題 Birational geometry from the moduli spaces of mirror CICs
3. 学会等名 Workshop on mirror symmetry and related topics, Kyoto 2016 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Shinobu Hosono
2. 発表標題 Birational geometry from the moduli spaces of mirror CICs
3. 学会等名 Mathematical Physics Seminar at Brandeis (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Shinobu Hosono
2. 発表標題 カラビ・ヤウ多様体の幾何学とミラーシンメトリー
3. 学会等名 ミラーシンメトリーの数理と物理 (招待講演)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	Harvard University	Brandeis University		
米国	CMSA, Harvard University	Math. Dept. of Brandeis University		
米国	Harvard University	Brandeis University		