様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年　６ 月 ２０ 日現在

機関番号：３２６６０
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2022
課題番号：１６Ｋ０５１０９

研究課題名（和文）正標数代数幾何学の深化

研究課題名（英文）Deeping algebraic geometry in positive characteristic

研究代表者
伊藤　浩行（Hiroyuki, Ito）

東京理科大学・理工学部数学科・教授

研究者番号：６０２３２４６９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：正標数2次元商特異点に関して以下の通り大きな成果を得ることができた。
長さp加法的有限群スキームに対応する導分作用素を一般化した擬導分を定義することで、この群スキーム作用とArtin-Schreier型群作用、すなわち野生的巡回群作用とを変形によって繋ぐ理論構築を行った。これによって有理二重点で特に低標数の場合にTaut特異点ではないことの背景理解へと繋がりMcKay対応理解への第一歩となったと思われる。
また、標数2の超特異K3曲面においてArtin不変量が3のストラータについて準楕円ファイブレーションを利用した具体的記述を行い、同時に興味深い線形符号を得ることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
正標数代数多様体の理解は代数幾何学や数論幾何学において非常に重要である。特に正標数をも包含した一般理論構築は代数多様体の理解に不可欠である。また、特異点理論についても同様である。代数幾何学や特異点論における一般理論構築の障害として低標数の例外的な現象がある。本研究はその様な例外的現象をも包含する背景理解や一般理論構築を目指すものであり、得られた研究成果は確実に代数幾何学や数論幾何学の発展に寄与するものと考えられる。

研究成果の概要（英文）：We have obtained the following great results on 2-dimensional quotient singularities in positive characteristic.
By defining a pseudo-derivation that generalizes the derivation corresponding to the length-p finite group scheme of additive type, we connect this group scheme action with the Artin-Schreier type group action, that is, the wild cyclic group action by deformation. That makes a theory for unified p-group schemes. This leads to a background understanding that the rational double point is not a Taut singularity, especially in the case of low characteristic, and it seems to have been the first step toward understanding the McKay correspondence.
In addition, we describe a strata with Artin invariant 3 on a supersingular K3 surface in characteristic 2 using quasi-elliptic fibrations, and at the same time we obtain interesting linear signatures.

研究分野：代数幾何学

キーワード：正標数代数幾何学　特異点　K3曲面

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

1970 年代以降 Enriques に代表されるイタリア学派による代数曲面の分類理論が Bombieri, Mumford 等により正標数の体上定義された場合に拡張され、多くの代数幾何学の理論が正標数へと拡張された。一方で、拡張の障害となる純非分離拡大や Frobenius 写像の存在、野生的分岐現象などについては統一的な枠組みを模索されてきたが、まだまだ全てを包含した理論は出来上がってはおらず、様々な正標数代数幾何学における病理現象として把握されてきた。
一方で研究代表者を含め、正標数代数幾何学者は特有の現象を解明しつつ、標数 0 では簡略化されている多くの理論の包括的一般理論の構築と理解に向けて研究を行ってきた。そのためには種々の病理現象の理論的背景の究明から始まり一般理論の構築へと向かう道筋を通るのが肝要であると認識された。
また、Frobenius 写像を用いた特異点理論の構築、3 次元代数多様体に対する極小モデルプログラムの進捗、正標数 3 次元代数多様体の特異点解消定理の証明、K3 曲面等の個々の多様体及びそのモジュライ空間の理解など多くの目覚ましい成果が背景にある。
また、代数幾何学を取り巻く周辺分野に目を向けると、正標数代数多様体の数論的研究も活発に行われると同時に、符号、暗号、疑似乱数生成等の理工学他分野への応用も多く得られている。
この様な背景から正標数特有の現象を記述する一般理論の構築、特に商特異点に関する理論構築や数論的研究対象となる個別の代数多様体の性質やモジュライ空間の構造究明、さらに多くの周辺分野との関わりを深化させる研究進展が課題となっていた。

２．研究の目的

本研究では主に正標数の体上定義される代数多様体と特異点に関して、代数幾何学、特異点論、表現論、数論、複素幾何学、応用代数学など周辺分野を取り入れた複眼的視点から次の 3 つを研究の主目的とした。

A) 特異点論における正標数特有の**病理的現象の統括的解明**とそれらを含む**一般理論の構築**
B) K3 曲面や Calabi-Yau 多様体に関する**諸問題の解決とモジュライ空間の構造解明**
C) 他分野との関連を見据えた**新しい正標数代数幾何学研究**の試み

A) に関連する具体的項目は、A1)野性的群作用とその商特異点、A2)群スキーム作用による商、A3)野生的 McKay 対応、A4)低標数の有理二重点の完全な理解、A5)Tjurina 数一定の軌跡、A6)等特異軌跡の決定である。
また、B)に関連する項目としては、B1)単有理予想の解決後のモジュライ空間、B2)Artin-塩田予想とモジュライ空間の Stratificatio、B4)標数 2 の Enriques 曲面、B5) 野生的群スキーム作用の応用などが挙げられる。
C)については、C1)正標数代数幾何学と非 Kaehler 幾何学との類似（複素幾何学)、C2)0 次元代数多様体としての有限体拡大における Artin-Schreier 塔とその応用としての疑似乱数生成,C3)符号理論への応用(応用代数学)、C4)拡大塔上の代数多様体の有理点の挙動（数論）C5)代数幾何を基礎とした理工系連携などを想定していた。

３．研究の方法

具体的な方法としては、A)、B)、C)それぞれにおいて当初は以下の通りとしていた。

A) 中心的扱いである野生的特異点の深い理解のために、群スキーム(族)による野生的商を考察し、擬導分を用いた p-Lie 理論を構築する。同時に少数の例しか知れれていない野生的商特異点や有限群スキーム商特異点などについて一般化可能な多くの例を作る。そして野生的群スキーム(族)の表現論的研究を行うことにより、野生的 McKay 対応を理解する。
B) K3 曲面の単有理予想の証明方法を利用し、モジュライ空間の詳細な構造を記述する。Calabi-Yau 多様体の持ち上げ不可能性の地政学的、Hodge 理論的特徴付けを行う。
C) 疑似乱数生成法(AST)の均等分布性に関し理論的、実験的に検証を行う。正標数代数多様体と非ケーラー多様体との間の類似する病理について種々の例を考察する。

特に A)については低標数の有理二重特異点について様々な側面から理解することが重要であり、有理二重点を中心的対象として研究を行う。また、B)については超特異 K3 曲面に定義される楕円及び準楕円ファイブレーション構造とその切断及び多重切断を主な対象として研究することで様々な知見を得る。C)については申請者の所属組織における他分野の研究者の協力を仰ぎながら研究を行う。

４．研究成果
A)に関しては、加法的有限群スキーム商に連動する導分による商を研究し、この商とか野生的巡回群作用による商を変形で繋ぐために擬導分作用素を定義し理論構築を行なった。以下は 2 次元代数多様体、すなわち代数曲面における場合の結果である。
擬導分の諸性質を調べ、野生的巡回群の作用と擬導分が等価であることを確かめ、加法的群スキーム作用の野生的巡回群作用への持ち上げについて、特に標数 2 では具体的な持ち上げの方法についても得ることができた。標数が 2 の場合は加法的有限群スキームの導分について具体的な形の特徴づけがあることから、擬導分への持ち上げについてはある種の微分方程式を標数 2 において解くことに帰着させることができる。具体的な種々の例について、この微分方程式を解くことで作用が持ち上がる多くの例を与えることができた。
一方、一般標数において、長さが p である加法的有限群スキームの導分については、その具体的な形の特徴づけが得られていない。そのため、擬導分への持ち上げについてはあまり良いとはいえない十分条件を得たのみに留まる。しかしながら、このケースでもこれまで知られていなかった作用持ち上げの例が得られ、有理二重点においても新たな知見を得ることができた。
さらに、有理二重点を一般化した標数が変化する特異点の系列をいくつか構成し、それらについての持ち上げ可能性について研究の端緒をつけた。これについては本研究での準備が功を奏して継続課題において大きな成果が出始めている。
ところで、正標数、特に低標数における有理二重点の徹底的な解明が重要である旨述べたが、継続してきた研究及び本研究成果の一つとして、有理二重点および一般次元単純特異点における等特異軌跡を完全に決定することができた。また、標数 2 の場合に、与えられた定義方程式から有理二重点の型を決定するアルゴリズムが Greuel 等により得られていたが、そのアルゴリズム及び派生する結果において主張及びその証明に補完的結果を与えることができ、決定アルゴリズムを完全なものとすることができた。

B)に関しては、超特異 K3 曲面について、特に標数が 2 の場合に研究協力者である齋藤と興味深い例を与えることができた。Artin 不変量によってモジュライ空間を記述できるが、Artin 不変量が 3 以上のストラータについては具体的な記述はなかなか得られず研究が難しい側面があった。準楕円曲面の Mordell-Weil 群を利用することで、モジュライ空間内の 2 次元ストラータとなる部分について非常に具体的な記述ができ、また、C)と関連するが興味深い線形符号を得ることもできた。同様の議論をより大きな Artin 不変量や他の標数へ拡張することが今後の課題であるが、これまでの研究で蓄積されてきたものが役立てると期待される。

C)について、Artin-Schreier 塔を利用した擬似乱数生成器の性能評価や改良については、その数学的性質の究明に依存しているが、再帰構造に伴ういくつかの予想に依存した形で性能評価が成り立っている。したがってこの予想を確かめる必要があるが、未だ成功していない。また、非 Kaehler 多様体と正標数代数多様体の間の類似については、Mumford が類似性を提唱してから半世紀が過ぎるが、具体的な証拠や研究の端緒がまだ出されておらず、挑戦的課題ではあったが、本研究においても進捗がなかった。これは非常に残念であり引き続き新たな視点の発掘に努めていきたい。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計8件（うち招待講演　7件／うち国際学会　4件）

１．発表者名 Hiroyuki Ito
２．発表標題 Rational double points in positive characteristics and related topics
３．学会等名 Degenerations, algebraic surfaces and related topics（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2019年

１．発表者名 Hiroyuki Ito
２．発表標題 On 2-dimensional group scheme quotient singularities
３．学会等名 ミニワークショップ「正標数の特異点、基本群、分岐」（招待講演）
４．発表年 2017年

１．発表者名 Hiroyuki Ito
２．発表標題 Group scheme quotient t singularities in dimension 2
３．学会等名 正標数の代数幾何とその関連する話題（招待講演）
４．発表年 2018年

１．発表者名 Hiroyuki Ito
２．発表標題 Wild group scheme quotient singulatiries
３．学会等名 TSUDA COLLEDGE AND OIST JOINT WORKSHOP ON CALABI-YAU VARIETIES: ARITHMETIC, GEOMETRY AND PHYSICS（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2016年

１．発表者名 Hiroyuki Ito
２．発表標題 Wild group scheme quotient singularities
３．学会等名 Workshop on Higher Dimensional Algebraic Geometry, Holomorphic Dynamics and Their Interactions（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2017年

１．発表者名 伊藤浩行
２．発表標題 正標数の幾何学
３．学会等名 淡路島幾何学研究集会2017
４．発表年 2017年

１．発表者名 Hiroyuki Ito
２．発表標題 On quasi-hyperelliptic fibrations
３．学会等名 The 15th Affine Algegraic Geometry Meeting（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2017年

１．発表者名 伊藤 浩行
２．発表標題 On wild group scheme quotient singularities
３．学会等名 代数幾何ミニ研究集会（招待講演）
４．発表年 2017年

〔図書〕　計1件

1．著者名	4．発行年
Miyanishi Masayoshi, Hiroyuki Ito	2020年
2．出版社	5．総ページ数
World Scientific	441
3．書名	
Algebraic Surfaces in Positive Characteristics, Purely Inseparable Phenomena in Curves and Surfaces	

〔産業財産権〕

〔その他〕

研究機関作成ページ
https://tus.elsevierpure.com/ja/persons/hiroyuki-ito
個人ホームページ
https://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/hi/
https://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/hi/math/index.html
Hiroyuki Ito's Research page
http://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/hi/math/index.html
東京理科大学研究者データベース
https://www.tus.ac.jp/ridai/doc/ji/RIJIA01.php
Hiroyuki Ito's Research page
http://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/hi/math/index.html
東京理科大学研究者データベース
https://www.tus.ac.jp/ridai/doc/ji/RIJIA01.php
Hiroyuki Ito's Research page
http://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/hi/math/index.html
東京理科大学研究者データベース
https://www.tus.ac.jp/ridai/doc/ji/RIJIA01.php

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究協力者	齋藤　夏雄 (Saito Natsuo)		
研究協力者	三井　健太郎 (Mitsui Kentaro)		

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関