様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　 ６ 月 ３０ 日現在

機関番号：３４４１６

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2016～2019

課題番号：１６Ｋ０５１１４

研究課題名（和文）アファイン有向マトロイドの位相的研究への可換代数の応用

研究課題名（英文）Application of commutative algebra to topological study on affine oriented matroids

研究代表者

柳川　浩二（Yanagawa, Kohji）

関西大学・システム理工学部・教授

研究者番号：４０２８３００６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,500,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題申請時には、アファイン有向マトロイド M に付随する単項式イデアルがCohen-Macaulay (以下、CM)ならば，Mの有界複体は可縮な(境界付き)ホモロジー多様体であることが概ね証明できており、この状況で、有界複体は閉球体と同相であると予想し、その解決を最大の目標とした。結果的に、3次元以下なら上記予想が証明できた他、4次元でも位相多様体であることまでは示すことができた。
期間の後半からは、Specht イデアルの研究に重心が移り、標数0の場合に、CMなSpechtイデアルを完全に決定した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
数学の基礎研究であり、基本的には純粋な学術的価値を追求するものである。たとえば、主たる目的とした予想は、かつて「Zaslavsky予想」と呼ばれた比較的有名な問題(現在は、Dong によって解決されている)の一般化を図るものであった。
ただ、有向マトロイドは応用数学の範疇に属する研究対象であり、今回の結果は純粋数学からのアプローチではあるが、将来的・間接的には何らかの応用が見つかる可能性が有る。

研究成果の概要（英文）：Just before this project started, the author and his coworker (almost) showed that if the ideal associated with an affine oriented matroid M is Cohen-Macaulay (CM,for short), then the bounded complex of M is a contractible homology manifold (with boundary). In this situation, we conjectured that the bounded complex is homeomorphic to a closed ball. This conjecture is the main aim of this project. Finally, we proved the conjecture when the dimension is at most 3. We also showed that the bounded complex is a topological manifold in the dimension 4 case.
In the latter period of this project, the Specht ideals have been a main object of the study.We completely determined the CM Specht ideals in the characteristic 0 case.

研究分野：代数学

キーワード：組合せ論的可換代数　アファイン有向マトロイド　Cohen-Macaulay 性

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

極小自由分解が正則 CW 胞複体を台に持つ単項式イデアルの研究は、90 年代半ばの D. Bayer, B. Sturmfels および彼らの協力者(当時新人だった代表者自身も多少かかわっている)によって開始されたもので、以後 20 年以上、「波」は有ったものの、組合せ論的可換代数のトピックの一つであり続けている。2010 年には J. Mermin (やや遅れて、独立に T. Clark)によって、当初からの懸案であった「安定単項式イデアルの Eliahou-Kervaire 分解が正則 CW 胞複体を台に持つ」ことが証明され、当時この話題の研究は再活性化していた。代表者も、前々研究課題『組合せ論的可換代数への導来圏や位相幾何学的手法の応用』、前課題 『組合せ論的位相幾何学の新しい手法の可換代数への応用』(ともに基盤研究(C))の期間中、福岡教育大学の岡崎亮太氏と共同で、上述の Mermin と Clark (特に後者)の理論を精密化する数本の論文を発表していた。

ここで話をいったん、有向マトロイドに切り替える。(通常の)マトロイドは、グラフやベクトル空間内のベクトル配置などの離散構造の一般化であり、応用数学において確固たる位置を占める。一方、有向マトロイドは、有向グラフや実ベクトル空間内のベクトル配置などの離散構造の一般化であり(通常のマトロイドが、ベクトル空間内のベクトル配置の抽象化であったので、有向マトロイドの「実ベクトル空間内の・・」との違いが気になるかも知れないが、実数なので正負の「向き」が効くのである)、その重要性が徐々に認識されつつある。アファイン有向マトロイドは、有向マトロイドから派生した概念で、実ベクトル空間内の超平面配置の抽象化である。Novik-Postnikov-Sturmfels は 2002 年の論文で、アファイン有向マトロイド M に付随する被約単項式イデアル O_M を定義し、その極小自由分解が M の有界複体を台に持つことを示した。代表者は、上述の岡崎氏との共同研究で得られた知見が、この O_M の研究に有効と直感し、ある程度の結果が得られていた時期に、本研究課題は開始された。

２．研究の目的

上述の、岡崎氏との共同研究で、Cohen-Macaulay (以下、CM と略記)な安定単項式イデアルの Eliahou-Kervaire 分解の台となる正則 CW 胞複体は、閉球体と同相であることを示していた。

マトロイドに付随する単項式イデアルは、組合せ論的可換代数にしばしば現れる。マトロイドの非常にバランスの取れた構造を反映し、対応するイデアルは常に CM である。一方、超平面配置の抽象化であるアファイン有向マトロイド M は、一般にはそこまで均整が取れておらず、イデアル O_M も CM とは限らない。安定単項式イデアルに関する上述の結果からの類推で、O_M が CM のとき、M の有界複体は閉球体と同相であろうと予想し、これの解決を本研究課題の取り敢えずの目標とした。O_M が CM となる重要(かつ、非常に特殊)な例として、M が “uniform” な場合が有るが、このとき有界複体が閉球体と同相であることは、X. Dong によって示されていた(2008 年)。彼の結果の超平面配置の場合は、「Zaslavsky 予想」と呼ばれる有名な問題であった。ここからも、この問題意識の重要性が伺えるであろう。

３．研究の方法

数学と言う分野の性質上、この項目に特記すべきことは少ないと思われる。ただし、研究期間の前半は、岡崎亮太氏(福岡教育大学)、中盤は渡辺純三氏(東海大学・名誉教授)、終盤は柴田孝祐氏(岡山大学)との共同研究が中心であり、彼らの大学を何度も訪問し、あるいは代表者の所属に招き、緊密な研究打ち合わせを行った。

４．研究成果

まず、以下の文章の便宜のため、当該研究期間中に出版(あるいは、掲載決定)された代表者の論文を、参照番号付きでリスト・アップする。

[1] Josep Àlvarez Montaner, Kohji Yanagawa, “Lyubeznik numbers of local rings and linear strands of graded ideals”, Nagoya Mathematical Journal, Vol.231, 2018, pp. 23-54.

[2] Ryota Okazaki, Kohji Yanagawa, “The Cohen-Macaulayness of the bounded complex of an affine oriented matroid”, Journal of Combinatorial Theory, Series A, Vol. 157, 2018, pp.1-27.

[3] Akihiro Higashitani, Kohji Yanagawa, “Non-level semi-standard graded Cohen-Macaulay domain with h-vector (h_0, h_1, h_2)”, Journal of Pure and Applied Algebra, Vol.222, 2018, pp 191-201.

[4] Junzo Watanabe, Kohji Yanagawa,“Vandermonde determinantal ideals”, Mathematica Scandinavica, Vol. 125, 2019, pp.179-184

[5] Kohji Yanagawa, “When is a Specht ideal Cohen--Macaulay?”, Journal of Commutative Algebra, 掲載決定

Josep Àlvarez Montaner 氏(カタルーニャ工科大学)との共同研究[1]は、査読付き学術雑誌に受理されたのも、実際に出版されたのも、今回の研究課題の期間中であるが、本質的には前研究課題の「宿題」を片付けたもので、本研究課題の中心からは外れるため、ここでは詳述しない。ただし、代表者のこの 5 年間の成果の中では、大きなものの一つで、2018 年出版の論文ながら、既にいくつかの学術論文に引用されている。

いよいよ、企画段階では本研究課題の中核であった、アファイン有向マトロイド・イデアル O_M に関する論文[2](岡崎亮太氏との共著)の解説に入る。本課題申請時には、O_M が CM のとき、M の有界複体 B_M が可縮な境界付きホモロジー多様体であることが概ね証明できていたが、本論文では証明の細部を詰めて完成させた他、Miller-Reiner の結果を用いて以下を示した。

定理 1. 上の状況・記号で、O_M が CM のとき、B_M は可縮な境界付きホモロジー多様体である(よって、B_M の境界は、境界無しのホモロジー多様体)。さらに、B_M が 3 次元以下の場合、実際に閉球体と同相である。4 次元の場合も、位相多様体ではある。

4 次元の場合、B. Mazur の例が有るので、理論上これだけでは閉球体と同相とは言えない(同相だと、強く信じてはいるが)。一般次元の場合に、実際に閉球体と同相であることを組合せ論的に示すには、shellability かそれに類する概念を用いる他無いと思われるが、Dong により既に解決されている uniform の場合以外は、現時点では打つ手が見当たらない状態である。かくして、[2]と言う、それなり(以上?)の成果が得られた所で、この方向は行き詰ってしまった。

その後、例えば、位相幾何学の専門家を研究グループに入れる・・・などの方向性も有り得たかと思うが、可換環論にこだわり、当初の目標と同じ「超平面配置・部分空間配置と関連する可換代数」の中で、新たな問題を模索する方向にシフトした。東谷章弘氏(当時:京都産業大学、現:大阪大学)との共同研究[3]もその一つである。これは、h^*-列が $(1, a, b)$ である格子多面体 P の Ehrhart 環 $K[P]$ がいつ水平(level)になるかと言う問題を扱っている。代表者自身の 1994 年の結果の系として、h^*-列が $(1, a, b)$ である格子多面体 P が整数分解性(integer decomposition property, 以下 IDP と略す)を持てば、$K[P]$ は必ず水平であることが分かるが、今回、以下の結果が得られた。

定理 2. P を、h^*-列が $(1, a, b)$ である格子多面体とする。Ehrhart 環 $K[P]$が水平でなければ、b は $a+1$ で割り切れる。逆に、b が $a+1$ で割り切れるような列 $(1, a, b)$ に対し、これを h^*-列に持つ格子多面体 P で $K[P]$ が水平でないものが構成できる。

上述の注意から、定理の後半で構成された P は、IDP を持たないことが分かる。近年では、IDP を少し弱めた“spanning”という条件が導入され、注目されているが、実は、この P は spanning ですらない。今回のように状況を絞り込んだ話に限らず、「格子多面体の spanning 性と可換代数」は、有望な問題意識かと思われる。

本研究課題は、研究期間が 1 年延長され 4 年間に及んだため、前半と後半でかなり状況が異なる。ここまで紹介したのは、前半から中盤までの状況である。一方、中盤以降は、Specht イデアルが研究の中心となった。

Specht 加群は対称群の表現論において決定的に重要なものである。体 K を固定したとき、自然数 n の分割 λ(通常、ヤング図形で図示される)に対し、K 上の S_n 加群 V_λが構成され、Specht 加群と呼ばれる。K の標数が 0 のとき、各 V_λ は単純であり、かつ、λが n の分割のすべてを動くと、単純 S_n 加群の同型類の完全なリストを与える。よって標数 0 のとき、任意の S_n 加群は、V_λ たちの直和と同型である。V_λの構成法としては、ヤング・タブロイドを用いたものが有名であるが、ヤング盤 T に対し、**Specht 多項式** $f_T \in K[x_1, \dots, x_n]=:R$ を定め、R の部分ベクトル空間 $\langle f_T \mid T$ は形がλのヤング盤$\rangle$を、V_λとすることも出来る。そこで、これが生成する R の イデアル $I_\lambda^{Sp} = (f_T \mid T$ は形がλのヤング盤$)$ を考え、形がλの **Specht イデアル**と呼ぶ。n 変数多項式環 R に n 次対称群が作用するのは非常に古典的な状況であるが、不思議なことに、Specht イデアルがこれまで研究された形跡は殆ど無い。強いて前例を捜せば、渡辺純三氏ら、アルティン環のレフシェッツ性を研究しているグループが、アルテイン完全交叉 $R/(x_1^2, \dots, x_n^2)$ における Specht イデアルを扱っているくらいである。なお、$I_\lambda^{Sp} \subset R$ が与えるアファイン空間 K^nの代数的集合は部分空間配置であり、超平面配置を介して、当初の研究対象であったアファイン有向マトロイドと関連している。

以下、$\lambda=(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$を n の分割とし、$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m \geq 1$ を常に仮定する。まず、I_λ^{Sp}の高さは λ_1であることが容易に確かめられる。ただし、極小素イデアルの高さがそろうのは、

(a)$\lambda_2 = 1$　　　または　　(b) $\lambda_1 = \lambda_{m-1}$

の場合に限られる。(a) は、λ=($n-d$,1, …, 1) の、いわゆる「フック型」のヤング図形の場合で、I_λ^{Sp} はサイズ $(d+1)\times n$ のヴァンデルモンド行列の極大小行列式全体が生成するイデアルと一致し、その極小自由分解が Eagon–Northcott 複体で与えられるなど、可換環論の定石に乗り易い。渡辺純三氏との共同研究[4]では次を示した。

定理 3． λ=($n-d$,1, …, 1) のとき、(任意の体 K に対し)I_λ^{Sp} は被約な CM イデアルである。

(b) $\lambda_1 = \lambda_{m-1}$ のときは、CM にならないことの方が多く、また、CM 性が標数に依存しうる。たとえば、λ=($n-3$, 3) のとき、I_λ^{Sp} が CM であるための必要十分条件は、標数が 2 でないことである。(λ=($n-4$, 4)のときは、計算し得た範囲では、標数 2,3 のときのみ非 CM であった。Specht イデアルの標数依存性は未知の部分が多く、今後の課題と言える。もう一つ付言すれば、Specht イデアルは、計算機にとっても非常に重く、計算機に強い学生に謝金を払って実例計算を手伝ってもらうなど、本研究費が有効に活用できた。)　[5]の主結果は、以下のものである。

定理 4．　I_λ^{Sp} が CM であるとき、λは次のいずれかを満たす。
(i) $\lambda_2 = 1$、つまり、λ=($n-d$,1, …, 1)
(ii) $m = 2$、つまり、λ=($n-d$, d)
(iii) $n = 2c+1$ ($\exists c \in \mathbb{N}$)で、λ=(c, c, 1)
さらに、標数 0 ならば、逆も成立する。つまり、(i)-(iii) のとき、I_λ^{Sp} は CM となる。

証明が難しいのは、(ii)、(iii)のときの、最後の主張である。まず、I_λ^{Sp} が(少なくとも、これらの場合には)被約イデアルであることを、(定義をそのままチェックする、と言う意味では初等的だが)かなり複雑な議論で示し、対称群が作用する部分空間配置の座標環に関する P. Etingof らの結果に直接帰着させる、という筋立てで証明している。この Etingof らの結果は、有理 Cherednik 代数に関する高度な理論を用いており、「標数 0」と言う条件はここに効いてくる。彼らの理論に依存しない、自立した証明を与えることも今後の目標である。また、(ii),(iii)の場合に限らず、「一般に、I_λ^{Sp} は被約か？」と言うのも自然な疑問であり、今後の課題としたい。

2019 年度には、柴田孝祐氏と共同で、上記(ii),(iii)の場合の I_λ^{Sp} の Hilbert 級数の計算に成功した。とくに、R/I_λ^{Sp} が CM のとき(たとえば、標数 0 のとき)、I_λ^{Sp} の極小自由分解は (ii)の場合は、d-linear strand と($d+1$)-linear strand の 2 本のラインに収まり、(iii)の場合は、linear resolution を持つことが示された(いずれの場合も、R/I_λ^{Sp} の a-不変量は 0 となる)。ただし、この研究の途中から、2019 年度に開始された代表者の次の研究課題『部分空間配置が与えるイデアルの Cohen-Macaulay 性』(基盤研究(C))に引き継がれている。実際、この研究打合せにかかわる旅費も、年度の前半は本研究課題から、後半は新しい研究課題から支出されている。

最後に、アファイン有向マトロイドの話に戻る。2017 年度あたりまでは、こちらの研究も継続しており、uniform なアファイン有向マトロイド M に対する O_M の Alexander 双対に関して、一定の結果を得ていた(未発表)。これは、2020 年に公開された A. Kunin らのプレプリント "Oriented Matroids and Combinatorial Neural Codes" との強い関連が伺える。本研究課題の当初の目的に今後再挑戦する上で、一つの足掛かりになることが期待される。

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計5件（うち査読付論文　4件／うち国際共著　1件／うちオープンアクセス　0件）

1．著者名 Junzo Watanabe, Kohji Yanagawa	4．巻 125
2．論文標題 Vandermonde determinantal ideals	5．発行年 2019年
3．雑誌名 Mathematica Scandinavica	6．最初と最後の頁 179-184
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.7146/math.scand.a-114906	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1．著者名 Ryota Okazaki, Kohji Yanagawa	4．巻 157
2．論文標題 The Cohen-Macaulayness of the bounded complex of an affine oriented matroid	5．発行年 2018年
3．雑誌名 Journal of Combinatorial Theory, Series A	6．最初と最後の頁 1-27
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jcta.2018.01.004	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1．著者名 Josep Alvarez Montaner, Kohji Yanagawa	4．巻 231
2．論文標題 Lyubeznik numbers of local rings and linear strands of graded ideals	5．発行年 2018年
3．雑誌名 Nagoya Mathematical Journal	6．最初と最後の頁 23-54
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1017/nmj.2017.10	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Akihiro Higashitani, Kohji Yanagawa	4．巻 222
2．論文標題 Non-level semi-standard graded Cohen-Macaulay domain with h-vector (h_0,h_1,h_2)	5．発行年 2018年
3．雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6．最初と最後の頁 191-201
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jpaa.2017.03.011	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1．著者名 Kohji Yanagawa	4．巻 掲載決定
2．論文標題 When is a Specht ideal Cohen-Macaulay?	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Journal of Commutative Algebra	6．最初と最後の頁 ―
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 ―

〔学会発表〕　計5件（うち招待講演　2件／うち国際学会　2件）

1．発表者名 Kohji Yanagawa
2．発表標題 When is a Specht ideal Cohen-Macaulay?
3．学会等名 1147th AMS Meeting, Spring Central and Western Joint Sectional Meeting, Special Session on Commutative Algebra and its Environs,（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

1．発表者名 柴田 孝祐; 柳川　浩二
2．発表標題 Strongly stable ideal の既約分解と局所コホモロジーの関係
3．学会等名 日本数学会 2019年度年会 代数学分科会
4．発表年 2019年

1．発表者名 柴田 孝祐; 柳川　浩二
2．発表標題 Strongly stable ideal のalternative polarization とそのAlexander 双対 について
3．学会等名 日本数学会 秋季総合分科会 代数学分科会
4．発表年 2018年

1．発表者名 柳川浩二
2．発表標題 When is a Specht ideal Cohen-Macaulay?
3．学会等名 PRIMA（Pacific Rim Mathematical Association） 2017 Congress（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2017年

1．発表者名 東谷 章弘，柳川 浩二
2．発表標題 Non-level semi-standard graded Cohen-Macaulay domains with h-vectors (h_0, h_1, h_2)
3．学会等名 日本数学会 秋季総合分科会
4．発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考