

令和 3 年 5 月 21 日現在

機関番号：34504  
研究種目：基盤研究(C) (一般)  
研究期間：2016～2020  
課題番号：16K05115  
研究課題名(和文) 高次元代数多様体のユニポテント構造と自己同型群  
  
研究課題名(英文) Unipotent structure of higher dimensional algebraic varieties and automorphism groups  
  
研究代表者  
宮西 正宜 (Miyanishi, Masayoshi)  
  
関西学院大学・特定プロジェクト研究センター・客員研究員  
  
研究者番号：80025311  
交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：代数多様体の構造をアフィン空間をファイバーとするファイブレーションを通して研究する。特に、ユニポテント群のアフィン代数多様体への作用とその商射を研究する。成果は成書の刊行(2021年6月予定)である。  
正標数の基礎体上で正標数の場合に特異的に起こる現象を代数曲面に対して記述する。成果は成書の刊行(2020年6月)である。

#### 研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は空間の、代数的に記述できる、幾何学的性質や認識方法と関係している。幾何学的性質は複素数体上で記述されるが、正標数 $p$ の場合には、幾何学的性質の標数 $p$ による退化(reduction)に関係する。代数的記述とは、多項式を使ってなされるもので、数学の枠を超えて、数学的手法を用いる科学分野全般に関わる。

研究成果の概要(英文)： Description of structures of higher-dimensional algebraic varieties via affine space fibrations. In particular, description of the quotient morphisms of affine algebraic varieties via unipotent group actions. These studies will be published as a book (June, 2021).

Description of phenomena which occur for algebraic surfaces in positive characteristic. The results were published as a book (June, 2020).

研究分野：代数幾何学

キーワード：アフィン空間 ファイブレーション 加法群 ユニポテント群 正標数 代数曲面 特異点

## 1. 研究開始当初の背景

$n$ 次元アフィン空間を  $A^n$  と表す. 代数多様体の支配的射  $f: V \rightarrow U$  の一般ファイバーが  $A^n$  に同型であるとき,  $f$  は  $A^n$ -ファイブレーションであるという. 代数多様体  $X$  に開集合  $V$  が存在して, ある整数  $n \geq 1$  に対して  $V$  が  $A^n$ -ファイブレーションをもつとき,  $X$  はユニポテント構造をもつという. 例えば,  $n$ 次元ユニポテント代数群が代数多様体  $X$  に忠実に作用していれば,  $G$ -不変な開集合  $V$  が存在して,  $V$  上に商射として  $A^n$ -ファイブレーションが存在するので,  $X$  はユニポテント構造をもつ. このような構造については, 代数曲面の場合に研究されてきたが, 3次元以上の代数多様体に対する知見は少なかった.

完備でない代数多様体を取り扱う手段として, 代数多様体  $X$  を完備代数多様体  $W$  に, 補集合  $D=W-X$  が単純交叉因子となるように埋め込み組  $(W, D)$  を調べることによって  $X$  の構造を見出す, という手法がある. 代数曲面の場合には, これは有効な方法でアフィン代数幾何学の発展に貢献したが, 3次元以上の場合には必ずしも十分な研究方法とはいえない. 高次元代数多様体をファイブレーションや代数群の作用による商射によって低次元の代数多様体の性質に還元するという方法が, 一つの有効な手段である.

3次元アフィン代数多様体上の  $F$ -ファイブレーション ( $F=A^1$ ,  $A^1 \setminus \{1 \text{ 点}\}$ ,  $A^2$ ) の構造に関する基礎的結果は得られているが, 特異ファイバーの構造や底空間における特異ファイバーの軌跡  $\text{Sing}(f)$  などについては分からないことが多い. ユニポテント群による商多様体の特異点についてもよく知られていない.

これらの研究を推進するグループの発表の場を「アフィン代数幾何学研究集会」として過去13回開催していた. この研究集会は外国人研究者にも公開されていて, 各集会に外国人研究集会の参加があった. また, 研究課題担当者もそれぞれ外国新研究者との密接な共同研究を続けている.

## 2. 研究の目的

以下の4課題を主要な研究目的とした.

- (1) 3次元以上の代数多様体にユニポテント構造または  $A^n$ -シリンダー開集合が存在するかどうかを調べて, 代数多様体が有理的であるか, 単有理的であるかなどの性質を解明する.
- (2) Fano 多様体の超曲面切断の補集合のユニポテント構造を調べる.
- (3) 代数多様体のユニポテント構造によって, 代数多様体の自己同型群または双有理的自己同型群のユニポテント部分群 (の大きさ) を調べる.
- (4) 代数多様体のユニポテント構造の変形を調べる.

研究課題の解明のためには多くの補助的結果を示さねばならない. それらの開発と解明も研究目的に含まれる.

## 3. 研究の方法

課題1~4について, 次のように具体的に実施する.

- (1) 課題1については,  $A^1$ -ファイブレーションの特異ファイバーと軌跡  $\text{Sing}(f)$  について, R. V. Gurjar (Tata 研究所), 増田佳代 (関学大), P. Russell (McGill 大学) と Oberwolfach 数学研究所や BIRS (Banff International Research Station) のプロジェクトとして共同研究を行

ってきた。これらの共同研究を継続する 2018 年に Oberwolfach 研究所の Research in pairs (=RIP) を使って, R.V. Gurjar, 増田佳代と「Affine space fibrations」に関する共同研究を行った。直前に, ポーランド科学アカデミーで開催された研究集会(5/25-6/3)を利用して, Gurjar, 増田, Russell と共同研究を行った。 商射  $q: A^3 \rightarrow A^3/G_a \cong A^2$  の特異ファイバーと特異ファイバーの軌跡  $\text{Sing}(q)$  による  $G_a$  の作用の分類問題はまた緒についたばかりであったが, これらの共同研究を通じてかなりの進展を見た。

3 次超曲面の超平面切断束の考察に関しては A. Dubouloz (Dijon 大学) と岸本崇 (埼玉大), または M. Zaidenberg (Grenoble 大学) や I. Cheltsov (Edinburgh 大学) と興味を共有しているため, 研究方向に関する情報交換を進めながら, 4 次超曲面の場合を研究する。研究期間の最終段階がコロナの世界的流行の時期と重なって, 共同研究や研究集会への出席が思うようにはかどらなかった。彼らの研究が先行しているのを認めざるを得ない。

(2) 課題 2 については, 2014 年 7 月に RIMS 研究集会 (増田佳代表) で Kyoto Workshop on Algebraic Varieties and Automorphism Groups を開催したが, その proceedings に投稿中の論文「Unipotent group actions on projective varieties」の中で, 基礎的結果を述べている。ここでは, 3 次元 Fano 多様体のピカール数  $\rho=1$  の場合でも  $\text{Pic}(V)=\mathbb{Z}[H]$  となっている場合しか考察していないので, 論文の方法を使って結果の一般化を考える。すなわち,  $G_a$  が  $V$  に作用しているとき,  $G_a$ -同変な豊富因子  $H$  を取り, 補集合  $V-V \cdot H$  のユニポテント構造を観察することになる。

(3) 課題 3 については, 黒田茂 (都立大), J. Blanc (Basel 大学), S. Lamis (Toulouse 大学) と興味を共有しているので, 彼らと必要な研究情報交換を行う。  $\text{Aut}(A^3)$ ,  $\text{BirAut}(P^3)$  のユニポテント部分代数群とユニポテント構造との関連について調べる。黒田茂, G. Freudenburg (Western Michigan 大), 小野田信春 (福井大) 主催の「多項式とアフィン代数幾何学研究集会 (PRAAG) 2018」での発表とその proceedings への投稿という形で結実した。また, 標数 0 の場合に  $G_a$  は有限部分群を持たないが, 正標数  $p$  の場合には  $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$  ( $n \geq 1$ ) が部分群となる。代数曲面または 3 次元代数多様体上の  $p$ -群  $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$  の作用を研究する。その作用や商多様体の特異点など分かっていないことが多い。 $n=1$  の場合は代数多様体の Artin-Schreier 拡大を取り扱うことになる。結果は Journal of Algebra の論文として発表された。正標数の代数曲面の研究においては, 研究集会開催などで伊藤浩行 (東京理科大) と協力する。2019 年を中心に伊藤浩行との共著執筆という形になった。本は 2020 年に World Scientific 社から刊行された。

(4) 課題 4 については,  $f: X \rightarrow C$  を代数曲面の平坦族とする。ただし,  $X$  は 3 次元代数多様体,  $C$  は代数曲線で,  $f$  はアフィン射とする。 $F$  の各ファイバー  $X_p$  がアフィン型 (すなわち,  $G_a$  の作用を持つ) とすれば,  $X$  自身が  $C$  上に  $G_a$  の作用をもつか, 他にも変形不変の性質から  $X$  の大域的な性質が導かれるかどうかを考える。例えば,  $X$  に正則ベクトル場が存在して, 各ファイバー  $X_p$  への制限が  $G_a$  の作用を与える局所巾零導分であれば,  $X$  には  $G_a$  の作用が存在する。

これらの課題で得られた成果は種々の具体的問題で, その有効性を検証する。たとえば, 「代数多様体の不分岐自己準同型射は有限射であるか」というジャコビアン問題の一般化に応用す

ることを考える。

#### 研究が当初計画どおりに進まない時の対応

研究遂行のための準備は十分に進めており、計画を4年間で完成させる見通しも持っている。進行が思わしくない場合は、Unipotent structure of algebraic varieties (仮題) という専門書または講義録を執筆・刊行することを考える。これまでの研究成果をまとめる専門書の執筆は、計画の進捗具合に関わらず考えるつもりでいるが、力点を少し執筆に置くことになる。

Covid19のパンデミックで、結果として、当初考えた研究計画は順調に進まなかった。国際研究集会への参加は、

Conference in geometry and representations in celebration of William Haboush's 75th birthday, Haevichi Hotel & Resort Jeju, Jeju island, South Korea, January 6--11, 2019 を最後として、2020年7月に St. Petersburg (Russia) で計画されていた Sh. Kaliman 研究集会の講演、2020年12月の IIT Bombay における R.V. Gurjar との共同研究などはすべてキャンセルされた。代わりに、R.V. Gurjar, 増田佳代, 宮西正宜の共著「Affine Space Fibrations」が De Gruyter 社から2021年6月に刊行される。

また、研究期間の1年間延長を願い出て許可された。

#### 4. 研究成果

アフィン空間  $A^n$  をファイバーとするファイブレーション  $f: X \rightarrow Y$  については、 $n \geq 2$  のとき、その構造を明確にすることができた。 $Y$  がアフィン代数多様体で  $n=1$  のときは加法群  $G_a$  の作用による商射と深く関わっているが、いつ商射になるかの条件を与えた。また、特異ファイバーの形も  $n=1$  のときに明確にした。同様の考察は射影空間  $P^n$  をファイバーとするファイバー空間についても行った。とくに、非特異射影代数多様体への加法群の作用をベクトル場の立場から記述した。

今後は、これらの成果を具体的問題に適用することが考えられる。その一つが、一般化されたジャコビアン問題への応用である。アフィン空間  $A^n$  の不分岐自己準同型写像が自己同型写像になるかという問題を考えるとき、特別な場合として加法群の作用と可換なものを考える。このとき、自己準同型写像は、商多様体  $A^n/G_a$  の上に自己準同型写像を誘導するが、その性質を研究することで、ジャコビアン問題の解決に役立つ情報が得られる。

これらの研究はアフィン代数幾何学の中心問題であり、関連分野への影響も大きい。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 7件 / うち国際共著 6件 / うちオープンアクセス 2件）

|  |                         |
|--|-------------------------|
| 1. 著者名<br>R.V. Gurjar, M. koras, K. Masuda, M. Miyanishi, P. Russell | 4. 巻<br>373             |
| 2. 論文標題<br>Affine threefolds with $G_a$ actions                      | 5. 発行年<br>2019年         |
| 3. 雑誌名<br>Mathematische Annalen                                      | 6. 最初と最後の頁<br>1211-1236 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>10.1007/s00208-017-1622-3                 | 査読の有無<br>有              |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難                               | 国際共著<br>該当する            |
| 1. 著者名<br>R.V. Gurjar, K. Masuda, M. Miyanishi                       | 4. 巻<br>319             |
| 2. 論文標題<br>Affine space fibrations                                   | 5. 発行年<br>2020年         |
| 3. 雑誌名<br>Springer Proceedings on PRAAG 2018                         | 6. 最初と最後の頁<br>16-42     |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>10.1007/978-3-030-42136-6_6               | 査読の有無<br>有              |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難                               | 国際共著<br>該当する            |
| 1. 著者名<br>R.V. Gurjar, K. Masuda, M. Miyanishi                       | 4. 巻<br>separate volume |
| 2. 論文標題<br>Affine space fibrations                                   | 5. 発行年<br>2018年         |
| 3. 雑誌名<br>Oberwolfach Preprints                                      | 6. 最初と最後の頁<br>1-51      |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>10.14760/OWP-2018-19                      | 査読の有無<br>無              |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスとしている（また、その予定である）                                | 国際共著<br>該当する            |
| 1. 著者名<br>R. V. Gurjar, K. Masuda, M. Miyanishi                      | 4. 巻<br>75              |
| 2. 論文標題<br>Unipotent group actions on projective varieties           | 5. 発行年<br>2017年         |
| 3. 雑誌名<br>Advanced Studies in Pure Mathematics                       | 6. 最初と最後の頁<br>119-162   |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>なし  | 査読の有無<br>有              |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスとしている（また、その予定である）                                | 国際共著<br>該当する            |

|  |                       |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名<br>Masayoshi Miyanishi                              | 4. 巻<br>477           |
| 2. 論文標題<br>Wild $Z/pZ$ -actions on algebraic surfaces      | 5. 発行年<br>2017年       |
| 3. 雑誌名<br>Journal of Algebra                               | 6. 最初と最後の頁<br>360-389 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1016/j.jalgebra.2016.12.025 | 査読の有無<br>有            |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難                     | 国際共著<br>-             |

|  |                     |
|--|---------------------|
| 1. 著者名<br>S. Chakraborty, R. V. Gurjar, M. Miyanishi | 4. 巻<br>221         |
| 2. 論文標題<br>Pure subrings of commutative rings        | 5. 発行年<br>2016年     |
| 3. 雑誌名<br>Nagoya Mathematical Journal                | 6. 最初と最後の頁<br>33-68 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1017/nmj.2016.2       | 査読の有無<br>有          |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難               | 国際共著<br>該当する        |

|   |                       |
|---|-----------------------|
| 1. 著者名<br>R.V. Gurjar, K. Masuda, M. Miyanishi        | 4. 巻<br>22            |
| 2. 論文標題<br>Affine threefolds with $A^2$ -fibrations   | 5. 発行年<br>2016年       |
| 3. 雑誌名<br>Transformation Groups                       | 6. 最初と最後の頁<br>187-205 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1007/s00031-016-9379-4 | 査読の有無<br>有            |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難                | 国際共著<br>該当する          |

|  |                      |
|--|----------------------|
| 1. 著者名<br>K. Masuda  | 4. 巻<br>online first |
| 2. 論文標題<br>Factorial affine $G_a$ -varieties isomorphic to hypersurfaces of Danielewski type | 5. 発行年<br>2020年      |
| 3. 雑誌名<br>Transformation Groups  | 6. 最初と最後の頁<br>1-19   |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1007/s00031-020-09631-y                                       | 査読の有無<br>有           |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難   | 国際共著<br>-            |

〔学会発表〕 計12件（うち招待講演 12件 / うち国際学会 10件）

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>M. Miyanishi   |
| 2. 発表標題<br>Triviality of affine space fibration                     |
| 3. 学会等名<br>Conference in geometry and representations (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2019年   |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>M. Miyanishi  |
| 2. 発表標題<br>Triviality of affine space fibrations                       |
| 3. 学会等名<br>The 17th meeting of affine algebraic geometry (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2019年  |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>M. Miyanishi  |
| 2. 発表標題<br>Singular fibers of $A^1$ -fibrations                                      |
| 3. 学会等名<br>Polynomial rings and Affine algebraic geometry (PRAAG 2018) (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2018年  |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>M. Miyanishi  |
| 2. 発表標題<br>Geometry of Artin-Schreier coverings                        |
| 3. 学会等名<br>The 16th Meeting of Affine Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2018年  |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>M. Miyanishi   |
| 2. 発表標題<br>Affine space fibration                                     |
| 3. 学会等名<br>Algebraic Geometry-Mariusz Koras in memoriam (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2018年   |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>K. Masuda   |
| 2. 発表標題<br>Hypersurfaces with $G_a$ -actions                           |
| 3. 学会等名<br>The 17th Meeting of Affine Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2019年  |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>M. Miyanishi   |
| 2. 発表標題<br>A remark on the generalized Jacobian conjecture for $A^2/G$                |
| 3. 学会等名<br>Higher-dimensional birational geometry, holomorphic dynamics (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2017年   |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>宮西正宜                                      |
| 2. 発表標題<br>$G_a$ -actions in positive characteristic |
| 3. 学会等名<br>野田代数幾何学シンポジウム (招待講演)                      |
| 4. 発表年<br>2018年                                      |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Kayo Masuda   |
| 2. 発表標題<br>Forms of $A^3$ with unipotent group actions                               |
| 3. 学会等名<br>Polynomial rings and Affine algebraic geometry (PRAAG 2018) (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2018年  |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>M. Miyanishi  |
| 2. 発表標題<br>Affine threefolds with $G_a$ -actions                                     |
| 3. 学会等名<br>Complex affine geometry, hyperbolicity and complex analysis (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2016年  |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>宮西正宜  |
| 2. 発表標題<br>A remark on the generalized Jacobian conjecture for $A^2/G$ |
| 3. 学会等名<br>The 15th Meeting of Affine Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2017年  |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>宮西正宜   |
| 2. 発表標題<br>Some applications of Jacobson's Galois theory for purely inseparable extension of exponent 1 |
| 3. 学会等名<br>Noda Algebraic Geometry Symposium 2017 (招待講演)  |
| 4. 発表年<br>2017年   |

## 〔図書〕 計3件

|   |                 |
|---|-----------------|
| 1. 著者名<br>M. Miyanishi, H. Ito                          | 4. 発行年<br>2020年 |
| 2. 出版社<br>World Scientific                              | 5. 総ページ数<br>451 |
| 3. 書名<br>Algebraic surfaces in positive characteristics |                 |

|                     |                 |
|---------------------|-----------------|
| 1. 著者名<br>宮西正宜・増田佳代 | 4. 発行年<br>2016年 |
| 2. 出版社<br>共立出版      | 5. 総ページ数<br>161 |
| 3. 書名<br>代数曲線入門     |                 |

|  |                 |
|--|-----------------|
| 1. 著者名<br>R.V. Gurjar, K. Masuda, M. Miyanishi | 4. 発行年<br>2021年 |
| 2. 出版社<br>De Gruyter                           | 5. 総ページ数<br>360 |
| 3. 書名<br>Affine space fibrations               |                 |

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

## 6. 研究組織

|                   | 氏名<br>(ローマ字氏名)<br>(研究者番号)                    | 所属研究機関・部局・職<br>(機関番号)             | 備考 |
|-------------------|--|-----------------------------------|----|
| 研究<br>分<br>担<br>者 | 増田 佳代<br><br>(Masuda Kayo)<br><br>(40280416) | 関西学院大学・理工学部・教授<br><br><br>(34504) |    |

## 7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|
|---------|---------|