

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 5 月 24 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2022

課題番号：16K05116

研究課題名(和文) 特性類の局所化に付随した留数理論とその応用

研究課題名(英文) Theory of residues associated with localization of characteristic classes and its applications

研究代表者

諏訪 立雄 (SUWA, Tatsuo)

北海道大学・理学研究院・名誉教授

研究者番号：40109418

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的は、相対 de Rham, Dolbeault, Bott-Chern 等のコホモロジーを用いて特性類の局所化を調べ、局所双対性により得られる留数を求め、その応用を図ることであった。次のような成果を得た：1. Lefschetz 一致点公式の一般化 (J.-P. Brasselet と共同)、2. 相対 Bott-Chern コホモロジーの理論と応用 (M. Correa と共同)、3. 複素多様体の blowing-up による Hodge 構造の挙動 (D. Angella 等と共同)、4. 佐藤超関数とその演算の簡明な表示 (本多尚文、伊澤毅と共同)。

研究成果の学術的意義や社会的意義

数学の研究により得られた知見により文化の発展に貢献する。本研究代表者が推し進める局所化理論が発展し、さまざまな方面での応用が見出されている。研究成果の概要欄で述べた成果の内、特に当初予期されなかったこととして、佐藤超関数およびそれに関連した演算、局所双対性等が相対 Dolbeault コホモロジー論を用いると簡明かつ明示的に表せることが分かり、超関数論の新たな展開を見た。これは複素解析幾何学、解析学に新たな境地を拓くことが期待される。

研究成果の概要(英文)：The purposes of this research project were to investigate the localization of characteristic classes using relative de Rham, Dolbeault and Bott-Chern cohomologies, to find explicitly the residues obtained via the local duality and to apply these to various problems. The following are the research achievements: 1. Generalization of the Lefschetz coincidence formula (with J.-P. Brasselet), 2. Theory of relative Bott-Chern cohomologies and applications (with M. Correa), 3. Behavior of the Hodge structure of a complex manifold under blowing-up (with D. Angella, N. Tardini and A. Tomassini), 4. Simple explicit representation of Sato hyperfunctions and their operations (with N. Honda and T. Izawa).

研究分野：数学

キーワード：幾何学 複素解析幾何学 特性類の局所化 相対コホモロジー 局所双対性 留数 佐藤超関数 特異多様体

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

本研究代表者諏訪は 30 年来、世界各地の研究者と特異多様体上のベクトル場の指数、複素解析的特異葉層構造の留数の研究を行って来た。これは Poincare-Hopf の指数定理をモデルに Baum-Bott, Camacho-Sad 留数の他代表者等により新たに見出されたものをも加え、理論を统一的に発展させたもので、1998 年 Hermann 社から出版された単行本に集大成された。ここで用いられた方法、得られた結果は葉層構造のみならず、特異多様体の特性類 (関連話題も含め、2009 年 Springer Lecture Notes として出版された、J.-P. Brasselet, J. Seade との共著)、局所化された交叉理論、Thom 類、埋込の Riemann-Roch、複素力学系への応用、Atiyah 類・Bott-Chern 類の局所化理論等の課題への応用、発展をみた。これらをさらに“標準的”なものとすべく現在基礎的な本を執筆中でほぼ完成している。

## 2. 研究の目的

上記背景に基づき、相対 de Rham, 相対 Dolbeault, 相対 Bott-Chern 等のコホモロジーを用いて、特性類の局所化を調べ、さらに局所双対性によって得られる留数を明示的に求め、その応用を図る。具体的には以上の課題の研究を継続し、特に次の課題に重点を置く。

(1) 局所化された交叉理論: 特異多様体上のベクトル束の枠による Chern 類の局所化に付随する留数の構造を明らかにし、これを基に特異多様体における交叉理論を展開する。これは二つのサイクルの交叉をそれらの集合論的交わりホモロジーに局所化して捉えるもので、より精密な結果が得られる。これはモチーフ理論の Hodge 実現の問題にも応用を持つ。

(2) Thom 類: 以上の研究で Cech-de Rham コホモロジーおよびそれに適合させた Chern-Weil 理論が重要な役割を果たす。この理論の枠組みで定められる Thom 類は強力であり、交叉理論で有効である他、例えばこれを用いて de Rham 複体に対する Lefschetz 不動点定理等が簡明に証明出来る。これにより Lefschetz 一致点定理の拡張等を行う。

(3) 埋込の Riemann-Roch: 上記 Thom 類を用いて、特異多様体の埋込に対する局所化された Riemann-Roch の定理を Cech-de Rham コサイクルレベルで証明する。

(4) Atiyah 類・Bott-Chern 類の局所化理論: Cech-Dolbeault コホモロジーの理論を展開し、Chern 類に関わる局所化理論を Atiyah 類に対しても構築することを開始した。さらにこれを Bott-Chern 類に対しても行っている。

1 Atiyah 類の局所化に付随した留数の構造を解明する。これは交叉理論でも重要と思われる。

2 複素解析的 Thom 類を導入しその応用、特に Dolbeault 複体に対する Lefschetz 不動点定理の幾何学的な簡明な証明を与える。さらに多様体の特異点を持つ場合への拡張を試みる。

3 相対 Bott-Chern コホモロジーの理論を構築し、このコホモロジーにおける Thom 類、Riemann-Roch の定理等を研究する。さらに Hermitian 葉層構造の留数理論を展開する。

## 3. 研究の方法

特性類の局所化理論を

(1) 組合せトポロジー、

(2) Cech の方法により相対化 (局所化) した de Rham, Dolbeault, Bott-Chern 等のコホモロジーに適合させた Chern-Weil 理論

の両面から遂行する。この方法は自然で比較的初等的かつ計算可能で、二つの理論の比較により、代数的、幾何的、解析的な明示的結果が得られる。これは既に多くの成果をもたらしており、上記課題ひいては複素解析幾何学を中心とした様々な分野への貢献が期待される。

特性類の局所化に関する我々の基本的考えは次のようである:

(1) 一般に幾何学的対象が与えられると、その“特異点集合”を除いた所で何らかの消滅定理があり、対応する特性類は特異点集合に局所化される。

(2) それは Alexander 準同型写像を通じ特異点集合のホモロジーに留数 (留類) を定める。

(3) この留数を含む重要な情報を調べる.

消滅定理の型としては次のようなものがある:

- (1) ベクトル束の階数, 枠による: 特異多様体の特性類, 交叉理論, Thom 類等.
- (2) ベクトル束の列の完全性による: 埋込の Riemann-Roch 定理等.
- (3) Bott 型消滅定理: 特異葉層構造の留数等.

なお Alexander 準同型写像の記述も組合せトポロジーによるものと Cech の方法により相対化された種々のコホモロジーによるもの二つを用いる. これらの比較により一層興味深い結果が得られる.

#### 4. 研究成果

(1) Lefschetz 一致公式を異なる次元の多様体間の写像に対して拡張した. これには組み合わせトポロジーによる Alexander 双対性, 局所および大域的一致ホモロジー類が基本的役割を果たす (J.-P. Brasselet との共同研究).

(2) 相対 Bott-Chern コホモロジーの理論を完成させた. 特に Bott-Chern, Aeppli コホモロジー等を統一的に扱い, 長完全列を得た. これは多くの興味深い応用を持つが, その一つとして特異 Hermitian 葉層構造の留数理論を展開し, 基本的例を与えた (M. Correa との共同研究).

(3) 相対 Dolbeault コホモロジーの応用として, 複素多様体の Hodge 構造の blowing-up による挙動について明示的結果を得た (D. Angella, N. Tardini, A. Tomassini との共同研究).

(4) 関数の概念を拡張するものとして佐藤超関数があり, これは特に微分方程式論に画期的発展をもたらした. これは正則関数の層を係数とする局所コホモロジーを用いて定義され, 理論は導来関手の言葉で展開される. 実際に用いるには具体的に表す必要がある. 当初全く予期しなかったことであるが, 本研究代表者諏訪は相対 Dolbeault コホモロジーによる超関数およびその演算の表現が極めて有効であることを見出した. この立場からの超関数論を展開した (本多尚文, 伊澤 毅との共同研究). この方法は代数解析学における他の問題にも有用であることが判明し将来の発展が期待される.

(5) 上記のような相対コホモロジーによる表現理論の一般化として, 層係数相対コホモロジーの細層分解による表現理論を展開し, 導来関手の理論との関係も明らかにした. さらにこれを層の射のコホモロジーの細層分解による表現理論に拡張した.

(6) 研究代表者は特性類の局所化理論に基づく複素解析幾何学の本を書き進めていた. 局所化された解析的交叉理論, 埋め込みに対する Riemann-Roch の定理等につき詳細な考察を行い, 完成に近づけた. これは複素解析幾何学および関連分野における基本的な書物となることが期待される.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 8件 / うち国際共著 4件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Tatsuo Suwa	4. 巻 -
2. 論文標題 Representation of relative sheaf cohomology	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Forum Math.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/forum-2022-0258	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Naofumi Honda, Takeshi Izawa and Tatsuo Suwa	4. 巻 75
2. 論文標題 Sato hyperfunctions via relative Dolbeault cohomology	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 J. Math. Soc. Japan	6. 最初と最後の頁 229-290
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/87668766	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tatsuo Suwa	4. 巻 13
2. 論文標題 Relative Dolbeault cohomology	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Riv. Mat. Univ. Parma	6. 最初と最後の頁 307-352
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tatsuo Suwa	4. 巻 III
2. 論文標題 Residues and hyperfunctions	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Handbook of Geometry and Topology of Singularities	6. 最初と最後の頁 565-644
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-95760-5_8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Jean-Paul Brasselet and Tatsuo Suwa	4. 巻 23
2. 論文標題 Local and global coincidence homology classes	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Fixed Point Theory and Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11784-021-00857-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Daniele Angella, Tatsuo Suwa, Nicoletta Tardini and Adriano Tomassini	4. 巻 7
2. 論文標題 Note on Dolbeault cohomology and Hodge structures up to bimeromorphisms	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Complex Manifolds	6. 最初と最後の頁 194-214
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/coma-2020-0103	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Mauricio Correa Jr and Tatsuo Suwa	4. 巻 101
2. 論文標題 Localization of Bott-Chern classes and Hermitian residues	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 J. London Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 349-372
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/jlms.12273	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Tatsuo Suwa	4. 巻 2101
2. 論文標題 Relative Dolbeault cohomology and Sato hyperfunctions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 数理解析研究所講義録「超局所解析と漸近解析」	6. 最初と最後の頁 119-132
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Tatsuo Suwa	4. 巻 -
2. 論文標題 Relative cohomology for the sections of a complex of fine sheaves	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 2017 代数幾何学シンポジウム記録 (於 城崎国際アートセンター)	6. 最初と最後の頁 113-128
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 C. Bisi, F. Bracci, T. Izawa and T. Suwa	4. 巻 195
2. 論文標題 Localized intersection of currents and the Lefschetz coincidence point theorem	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Annali di Matematica Pura ed Applicata	6. 最初と最後の頁 601-621
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10231-015-0480-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

[学会発表] 計18件 (うち招待講演 18件 / うち国際学会 12件)

1. 発表者名 Tatsuo Suwa
2. 発表標題 Relative Dolbeault cohomology and hyperfunctions
3. 学会等名 Cohomology of Complex Manifolds and Special Structures - II (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 諏訪立雄
2. 発表標題 Relative Dolbeault cohomology and hyperfunctions
3. 学会等名 葉層構造の幾何学とその応用 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Tatsuo Suwa
2. 発表標題 Relative Dolbeault cohomology and hyperfunctions
3. 学会等名 The 14-th Kagoshima Algebra-Analysis-Geometry Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tatsuo Suwa
2. 発表標題 Representation of local cohomology
3. 学会等名 Workshop on Topology of Singularities (東京理科大学) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 諏訪 立雄
2. 発表標題 Relative Dolbeault cohomology and Hodge decomposition problem
3. 学会等名 大阪大学幾何学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tatsuo Suwa
2. 発表標題 Representation of Sato hyperfunctions by relative Dolbeault classes
3. 学会等名 Hayama Symposium on Complex Analysis in Several Variables XX & Pacific Rim Complex-Symplectic Geometry Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 諏訪 立雄
2. 発表標題 相対 Dolbeault コホモロジーとその佐藤超関数論への応用
3. 学会等名 2018 年度日本数学会秋季総合分科会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tatsuo Suwa
2. 発表標題 Relative Dolbeault cohomology and its application to the Sato hyperfunction theory
3. 学会等名 Seminario di Analisi Complessa, Universita "Tor Vergata", Roma, Italy (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tatsuo Suwa
2. 発表標題 Relative Bott-Chern cohomology and its applications
3. 学会等名 Seminario di Geometria e Analisi Complessa, Univ. Firenze, Italy (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 諏訪 立雄
2. 発表標題 Local and global coincidence homology classes
3. 学会等名 東京大学トポロジー火曜セミナー (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Tatsuo Suwa
2. 発表標題 Relative de Rham, relative Dolbeault cohomologies and their applications I-IV
3. 学会等名 Hokkaido University Summer Institute, "Complex Analytic Geometry" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Tatsuo Suwa
2. 発表標題 Relative Bott-Chern cohomology
3. 学会等名 Hokkaido University Workshop, "Residues, Dynamics and Hyperfuntions" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 諏訪 立雄
2. 発表標題 Relative Dolbeault cohomology and Sato hyperfunctions
3. 学会等名 京都大学数理解析研究所共同研究「超局所解析と漸近解析」(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Tatsuo Suwa
2. 発表標題 Relative Dolbeault cohomology and Sato hyperfunctions
3. 学会等名 Kinosaki Algebraic Geometry Symposium 2017 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Tatsuo Suwa
2. 発表標題 Relative Dolbeault cohomology and Sato hyperfunctions
3. 学会等名 The 5-th Franco-Japanese-Vietnamese Symposium on Singularities (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 諏訪 立雄
2. 発表標題 Relative Dolbeault cohomology and its applications
3. 学会等名 第 12 回 鹿児島 代数・解析・幾何学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 T. Suwa
2. 発表標題 Relative Bott-Chern cohomology
3. 学会等名 Residues and Dynamics, Univ. Pisa, Italy (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 T. Suwa
2. 発表標題 Thom class and the Riemann-Roch theorem
3. 学会等名 Seminario Geometria, Univ. Ferrara, Italy (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
フランス	リュミニ数学研究所			
イタリア	ローマ大学	フィレンツェ大学	パルマ大学	
ブラジル	ミナスジェライス大学			