

令和 3 年 6 月 15 日現在

機関番号：12101  
研究種目：基盤研究(C)（一般）  
研究期間：2016～2020  
課題番号：16K05119  
研究課題名（和文）ツイスター理論の部分多様体論における展開

研究課題名（英文）Twistor theory in Submanifold geometry

## 研究代表者

木村 真琴 (Kimura, Makoto)

茨城大学・理工学研究科（理学野）・教授

研究者番号：30186332

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：物理で考えられたツイスター理論は、数学、特に幾何学に応用されて重要な成果が生まれてきた。複素多様体の中で、最も良い性質をもつ複素射影空間は、複素数ベクトル空間の中の複素直線の集合として実現される。そして、その複素射影空間内の実超曲面の中で、良い性質をもつホップ超曲面について、複素数ベクトル空間内の複素平面の集合として実現される、複素グラスマン多様体の四元数ケーラー構造に関するツイスター空間の極大水平部分多様体から構成できることを示した。

## 研究成果の学術的意義や社会的意義

複素双曲空間のホップ超曲面については、部分的な構造定理はいくつか知られていたが統一的に説明できる結果は得られていなかった。我々は、不定値複素グラスマン多様体の「パラ四元数ケーラー構造」に関する3つのツイスター空間を用いて、ホップ超曲面の統一的な構造定理を得た。特に、3つの内の1つのツイスター空間は我々が初めて明らかにしたもので、今後の展開が期待される。

研究成果の概要（英文）：There are a lot of applications of twistor theory in mathematics and geometry. We show that Hopf hypersurface in a complex projective space is realized as a circle bundle over maximal horizontal submanifold of twistor space of complex 2-plane Grassmann manifold.

研究分野：幾何学

キーワード：ツイスター空間 ホップ超曲面 複素グラスマン多様体 四元数ケーラー構造 パラ四元数ケーラー構造

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

(1) 複素射影空間内の実超曲面で、単位法ベクトルに外の空間の複素構造を施すことによって得られる構造ベクトル場が、実超曲面の主曲率ベクトルであるとき「ホップ超曲面」という。等質な実超曲面はホップ超曲面であることが高木亮一によって知られていた。また、複素射影空間内の複素部分多様体と一定距離である点の集合の「チューブ」は、それがなめらかな実超曲面であるとき、ホップ超曲面であることがセシル ライアンによって知られていた。しかし、すべてのホップ超曲面がそのようにして得られる訳ではなかった。我々は先行研究として、複素射影空間内の実超曲面から複素 2 平面のなす複素グラスマン多様体へのガウス写像を考察し、特にホップ超曲面については、構造ベクトル場の積分曲線に沿ってガウス写像が一定であって、そのガウス写像による像が複素グラスマン多様体の四元数ケーラー構造について、最大次元の全複素部分多様体であることを示した。

(2) 微分幾何学においては、曲率が基本的に重要な量である。複素射影空間の実超曲面について、自然に定義される概接触構造で不変な接空間の 2 次元部分空間に関する断面曲率(断面曲率)が一定である実超曲面は、その曲率の観点から良い空間であると言える。研究代表者は、1987 年にその条件をみたす実超曲面は 3 つのクラスに限られることを示した：(a) 1 点からの距離が一定である点の集合の「測地的超球面」、(b) 複素射影超平面の 1 パラメーター族からなる「線織実超曲面」、(c) 複素射影超平面内の線織実超曲面の 2 パラメーター族からなる実超曲面。しかし(c)については、具体例やその構成法など知られていなかった。

(3) 複素双曲空間の実超曲面については、等質でもホップではないものが存在する一方で、線織実超曲面で等質なものが存在する。これは、複素射影空間の線織実超曲面が完備ではないことと比べると、著しく異なる性質である。また、複素双曲空間のホップ超曲面については、その構造ベクトル場の(一定である)主曲率の値が大きい場合と小さい場合に、それぞれ構造定理が知られていたが、統一的な研究は得られていなかった。また、先行研究として(1)と同様に、複素双曲空間の実超曲面から不定値複素グラスマン多様体へのガウス写像を考察し、「パラ四元数ケーラー構造」に関して同様な結果を得ていた。

### 2. 研究の目的

(1) まず、複素射影空間および複素双曲空間のホップ超曲面について、統一的な構成法を作りたい、さらに、極小部分多様体やスカラー曲率が一定など、幾何学的に興味深い対象を調べる。

(2) 複素射影空間の実超曲面について、上記の 1. の (2) の (c) について、具体的な構成法を明らかにして、興味深い例を見つける。

(3) 複素双曲空間の線織実超曲面について、新たな構成法を求めて、興味深い対象を調べる。

### 3. 研究の方法

(1) 複素射影空間、および複素双曲空間のホップ超曲面について、それぞれの単一のものを考えるだけでなく、(特異点も許容して)平行超曲面の族を考える。そして、複素 2 平面のなす複素グラスマン多様体のツイスター空間を用いて、ホップ超曲面の構成法を探る。

(2) 複素射影空間の実超曲面で、断面曲率が一定な超曲面について、フォーカル写像の議論を用いて調べる。

(3) 複素双曲空間の線織実超曲面については、複素双曲超平面に「双対である」、複素ミンコフスキー空間内の正定値複素直線が作る「不定値複素射影空間」内の実 1 次元曲線を用いて調べる。

以上の研究を実現するために、研究協力者と相互訪問し対面しながら研究内容を検討するとともに、インターネットを通じて情報交換をする。

### 4. 研究成果

(1) 複素 2 平面のなす複素グラスマン多様体は、複素数ベクトル空間におけるエルミート内積について、正規直交である 2 つのベクトルがつくる「複素スティーフェル多様体」を、2 次の

ユニタリー群  $U(2)$  の作用で割った空間として実現される。また、複素ステューフェル多様体を  $U(2)$  の中心である  $U(1)$  で割った空間は、3 - 佐々木多様体の構造を持ち、さらに  $U(2)$  の部分群  $SU(2)$  (特殊ユニタリー群) の実部である 2 次特殊直交群  $SO(2)$  で割った空間が、複素グラスマン多様体の四元数ケーラー構造に関するツイスター空間であって、複素射影空間内の測地線と、その複素直線内の同心円がつくる空間と同一視できることがわかる。そして、そのツイスター空間の複素接触構造に関する(複素)ルジャンドル部分多様体に対して、ツイスター空間上のサークルバンドルの全空間である 3 - 佐々木多様体の引き戻し束から、自然に複素射影空間内のホップ超曲面とその平行超曲面の族を構成できることがわかった。

同様に、複素ミンコフスキー空間内の不定値複素平面がつくる、不定値複素グラスマン多様体についても、パラ四元数ケーラー構造に関するツイスター空間を用いて、複素双曲空間内のすべてのホップ超曲面を構成できることがわかった。この場合、複素射影空間の場合と異なり、不定値複素グラスマン多様体の (i) 複素構造、(ii) パラ複素構造(概積構造) と (iii) ベキ零複素構造に関する、3 つのツイスター空間を考える必要がある。

- (2) 断面曲率が一定であるような複素射影空間の実超曲面に関して、まず「線織実超曲面」については、余次元 1 の葉層構造の葉である複素射影超平面の直交方向である、構造ベクトル場の積分曲線を調べることによって様々な研究がなされてきた。我々は、複素射影空間内の線織実超曲面について、各点から直交方向に  $1/2$  だけ進んだ点の集合が実 1 次元の曲線であることを示した。特に極小な線織実超曲面については、対応する複素射影空間内の曲線は測地線であることがわかる。逆に、複素射影空間内の実 1 次元曲線に対して、その上の半径が  $1/2$  のチューブが線織実超曲面であることもわかった。さらに、複素射影超平面内の線織実超曲面の 2 パラメーター族からなる実超曲面については、各点から直交方向に  $1/2$  だけ進んだ点の集合が複素構造で「不変ではない」実 2 次元の曲面であることがわかった。そして、複素射影空間内の複素構造で不変ではない実 2 次元曲面に対して、その上の半径が  $1/2$  のチューブが、断面曲率が一定であるような複素射影空間の実超曲面(の第 3 のクラス)であることを示した。その応用として、複素射影平面内の 3 次元実超曲面で、その構造ベクトル場が実超曲面のリッチテンソルの固有ベクトルであるものを分類し、(a) ホップ超曲面、(b) 線織実超曲面、(c) ラグランジュ曲面上の半径が  $1/2$  のチューブ、のいずれかであることがわかった。
- (3) 複素双曲空間内の線織実超曲面についても、従来は余次元 1 の葉層構造の葉である複素双曲超平面の直交方向である、構造ベクトル場の積分曲線を調べることによって調べられてきた。我々は、複素双曲超平面に「双対である」、複素ミンコフスキー空間内の正定値複素直線が作る「不定値複素射影空間」内の実 1 次元曲線と、複素双曲空間内の線織実超曲面が対応付けられることを明らかにした。そして、複素双曲空間内の「スカラー曲率が一定」である線織実超曲面については、対応する不定値複素射影空間内の実 1 次元曲線が「光的」であることが同値であることを示した。さらに、複素双曲空間内の線織実超曲面が極小であることと、対応する不定値複素射影空間内の実 1 次元曲線が「測地線」であることが同値であることも示した。特に、不定値複素射影空間内の実 1 次元曲線が「空間的」「時間的」「光的」であることが、対応する複素双曲空間内の線織実超曲面の完備性など、幾何学的性質の関係もわかる。
- (4) 2 つの同じ次元の球面の積多様体について、直交群の積の作用で不変であるリッチソリトンが、常微分方程式の解を用いて構成できることを示した。また、複素射影空間内ないの測地的超球面について、実超曲面上の測地線が外の複素射影空間の測地線でもあるような「外的測地線」を用いて、その特徴づけを与えた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計13件（うち査読付論文 13件／うち国際共著 7件／うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Cho Jong Taek, Kimura Makoto	4. 巻 68
2. 論文標題 Real hypersurfaces with constant Phi-sectional curvature in complex projective space	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Differential Geometry and its Applications	6. 最初と最後の頁 101573 ~ 101573
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.difgeo.2019.101573	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Kimura Makoto, Lee Hyunjin, Perez Juan de Dios, Suh Young Jin	4. 巻 To appear
2. 論文標題 Ruled Real Hypersurfaces in the Complex Quadric	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 The Journal of Geometric Analysis	6. 最初と最後の頁 To appear
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s12220-020-00564-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Cho Jong Taek, Kimura Makoto	4. 巻 9
2. 論文標題 Transversal Jacobi Operators in Almost Contact Manifolds	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematics	6. 最初と最後の頁 31 ~ 31
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3390/math9010031	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 MAKOTO KIMURA, SADAHIRO MAEDA AND HIROMASA TANABE	4. 巻 207
2. 論文標題 New construction of ruled real hypersurfaces in a complex hyperbolic space and its applications	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Geometriae Dedicata	6. 最初と最後の頁 227-242
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10711-019-00496-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Cho Jong Taek, Kimura Makoto	4. 巻 264
2. 論文標題 Levi-umbilical real hypersurfaces in Hermitian symmetric spaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 145 ~ 157
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2019.06.009	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Jong Taek Cho and Makoto Kimura	4. 巻 56
2. 論文標題 Gradient Ricci soliton on $O(n)$ -invariant $n$ -dimensional submanifold in $S^n(1) \times S^n(1)$	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of the Korean Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 81-90
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4134/JKMS.j180047	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kimura Makoto, Ortega Miguel	4. 巻 16
2. 論文標題 Hopf Real Hypersurfaces in the Indefinite Complex Projective Space	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Mediterranean Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 No.27, 16 pp.
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00009-019-1299-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kimura Makoto, Maeda Sadahiro, Tanabe Hiromasa	4. 巻 109
2. 論文標題 The homogeneous ruled real hypersurface in a complex hyperbolic space	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Geometry	6. 最初と最後の頁 Art. 16, 8 pp
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00022-018-0421-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Makoto Kimura and Sadahiro Maeda	4. 巻 47
2. 論文標題 Characterizations of three homogeneous real hypersurfaces in a complex projective space	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Hokkaido Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 291-316
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14492/hokmj/1529308820	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Makoto Kimura, Sadahiro Maeda and Hiromasa Tanabe	4. 巻 48
2. 論文標題 Integral curves of the characteristic vector field of minimal ruled real hypersurfaces in non-flat complex space forms	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Hokkaido Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 589-609
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14492/hokmj/1573722019	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Makoto Kimura	4. 巻 54
2. 論文標題 Hopf hypersurfaces in complex projective space and half-dimensional totally complex submanifolds in complex $S^2$ -plane Grassmannians II	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Differential Geometry and its Applications	6. 最初と最後の頁 44-52
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.difgeo.2016.12.007	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Jong Taek Cho and Makoto Kimura	4. 巻 229
2. 論文標題 Levi-umbilical real hypersurfaces in a complex space form	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Nagoya Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 99-112
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/nmj.2016.63	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Jin-ichi Itoh and Fumiko Ohtsuka	4. 巻 219
2. 論文標題 A natural generalization of regular convex polyhedra	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 43-54
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2017.01.004	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計13件 (うち招待講演 12件 / うち国際学会 10件)

1. 発表者名 Makoto Kimura
2. 発表標題 Gauss map of real hypersurfaces in non-flat complex space forms and twistor space of complex 2-plane Grassmannian
3. 学会等名 Workshop on the isoparametric theory, Beijing (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Makoto Kimura
2. 発表標題 Real hypersurfaces in non-flat complex space forms and twistor spaces of complex $2$ -plane Grassmannian
3. 学会等名 The 22nd International Workshop on Differential Geometry of Submanifolds in Symmetric Spaces, Daegu (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Makoto Kimura
2. 発表標題 Real hypersurfaces in non-flat complex space forms and twistor spaces of complex 2-plane Grassmannian
3. 学会等名 International workshop on Geometry of submanifolds 2019, Istanbul (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 木村真琴
2. 発表標題 非平坦複素空間形の実超曲面と複素2-平面グラスマン多様体のツイスター空間
3. 学会等名 2019 日本数学会秋季総合分科会幾何学分科会特別講演（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Makoto Kimura
2. 発表標題 Twister spaces of complex 2-plane Grassmannian and Hopf hypersurfaces in non-flat complex space forms
3. 学会等名 Mini Workshop on Submanifolds in Hermitian Symmetric Spaces and Related Topics, Daegu-2018（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Makoto Kimura
2. 発表標題 Polar hypersurfaces of curves and surfaces in non-flat complex space forms
3. 学会等名 Mini Workshop on Submanifolds in Hermitian Symmetric Spaces and Related Topics, Daegu-2018（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 MakotoKimura
2. 発表標題 Ruled submanifolds in complex space forms
3. 学会等名 Workshop on Differential Geometry, Topology and Mathematical Physics, Gwangju-2019（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年



1. 発表者名 Makoto Kimura
2. 発表標題 Twistor space of complex 2-plane Grassmannian and Hopf hypersurfaces in non-flat complex space forms
3. 学会等名 Workshop on Differential Geometry, Gwangju-2017 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年～2018年

1. 発表者名 木村真琴
2. 発表標題 線織部分多様体について
3. 学会等名 東京理科大学理工学部数学科談話会 (招待講演)
4. 発表年 2017年～2018年

1. 発表者名 Makoto Kimura
2. 発表標題 Twistor space of complex 2-plane Grassmannian and submanifolds in complex space forms
3. 学会等名 DGA 2016 (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Makoto Kimura
2. 発表標題 Submanifolds of complex space forms and twistor space of complex 2-plane Grassmannian
3. 学会等名 Quaternionic Differential Geometry and its Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Makoto Kimura
2. 発表標題 Real hypersurfaces in non-flat complex space forms and (para-)quaternionic geometry of complex 2-plane Grassmannian
3. 学会等名 Submanifold theory, Yuzawa 2016 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Makoto Kimura
2. 発表標題 Twistor space of complex 2-plane Grassmannian and Hopf hypersurfaces in non-flat complex space forms
3. 学会等名 Workshop on Differential Geometry, Gwangju-2017 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Makoto Kimura <a href="https://kmakoto.sci.ibaraki.ac.jp">https://kmakoto.sci.ibaraki.ac.jp</a>
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	入江 博  (Iriyeh Hiroshi)  (30385489)	茨城大学・理工学研究科(理学野)・准教授    (12101)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分 担 者	大塚 富美子  (Ohtsuka Fumiko)  (90194208)	茨城大学・理工学研究科（理学野）・准教授     (12101)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関