様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２年　５月２１日現在

機関番号：１３３０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2019
課題番号：１６Ｋ０５１２４

研究課題名（和文）倉持境界の幾何解析の展開

研究課題名（英文）Geometric analysis on Kuramochi boundaries

研究代表者
加須栄　篤（Kasue, Atsushi）

金沢大学・数物科学系・教授

研究者番号：４０１５２６５７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：非再帰的ネットワークの無限遠方に広がっていく有限部分ネットワークの境界上のディリクレ-ノイマン写像は、有限部分ネットワークの取り方に関係なく，必ずモスコ収束することを発見する。収束極限はネットワークの一つの理想境界である倉持境界上のディリクレ‐ノイマン写像である。非再帰的重み付きリーマン多様体に対しても同様の結果が成り立つ。モジュラー列空間の枠組みにおける非線形抵抗ネットワークの倉持境界上のディリクレ境界値問題を考え、理想境界上の任意の連続関数が可解であることを証明する。さらに有界正値解に関するリウヴィユ性、カジミンスキイ 条件、大森-ヤウ型の弱最大値原理などの同値性について成果を得る。

研究成果の学術的意義や社会的意義
　ネットワークの収束に関する過去に類似の結果がないオリジナルな発見は、非再帰的ネットワークのエネルギー有限な調和関数全体のなす空間を表現する倉持コンパクト化と倉持境界に関して新しい見識を提供する。非再帰的重み付きリーマン多様体にも適用できる内容で、倉持境界に関する課題解決の重要なステップとなる。
　また、モジュラー列空間の枠組みにおける非線形抵抗ネットワークの非線形ポテンシャル論の研究成果は、先駆け的内容で、今後の非線形ネットワークの幾何解析の基礎となる。

研究成果の概要（英文）：We study the Kuramochi boundary of a connected nonparabolic network in connection with the Hilbert space consisting of functions with finite Dirichlet sum. It is proved that the Dirichlet form induced on the boundary of a connected finite subset of the network Mosco-converges to that on the Kuramochi boundary as the connected finite subsets increases to exhaust the network. When we consider a nonparabolic weighted Riemannian manifold, we find the similar result hold. We deal also with a nonlinear resistive network in the framework of modular sequence spaces, and study the Kuramochi type boundary. We show that Perron method is applicable to solve Dirichlet boundary value problems, and the regularity of the boundary is investigated. Moreover the equivalence of the Liouville property, the Khas'minskii condition and the weak Omori-Yau maximum principle for operators of Laplacian with potential term is proved. A number of criteria for these properties are given.

研究分野：数物科学

キーワード：非再帰的ネットワーク　倉持境界　ディリクレ・ノイマン写像　モスコ型収束　ディリクレ境界値問題　ペロン法　リウヴィユ性　大森-ヤウ型の弱最大値原理

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９（共通）

１．研究開始当初の背景
【1】非放物的ネットワークの倉持境界の研究において、ランダムウォークはほとんど確かに倉持境界の調和境界部分に値を持つ確率変数に収束し、ディリクレエネルギー有限な関数は、ランダムウォークに沿って調和境界上の L^2 関数に概収束かつ L^2 収束し、これからランダムウォークによる調和境界上の像測度が調和測度であることが判明し、これを通して調和関数のディリクレ問題およびノイマン問題の核関数表現が得られる。正値調和関数を扱う著名なマルチン境界理論には、膨大な研究成果があるが、エネルギー有限調和関数を扱う倉持境界の理論がようやく整備され、重要な研究対象となる。
【2】無限ネットワークにおいて、指数 p のディリクレエネルギー有限な関数空間とこれに関する p‐倉持コンパクト化の研究において、p‐ロイデンコンパクト化の商空間である p‐倉持コンパクト化は距離付け可能であり、うまく距離を選ぶとネットワークの測地的距離から p‐倉持コンパクト化への自然な埋め込みが p‐エネルギー有限であることが明らかとなり、この示唆を受けて、倉持コンパクト化の幾何学的手法によるアプローチの可能がある。とくに双曲空間に埋め込まれている無限グラフの場合には、双曲空間の幾何学的理想境界への集積点から得られる理想境界との関係が重要であり、この状況での重要な結論が期待される。
【3】モジュラ―列空間の枠組みから定まる非線形ネットワークに関する先駆け研究が行われ、ロイデン分解、トムソンの原理、ネットワーク射とレイリーの単調性法則の明確化とその応用、ロイデンおよび倉持コンパクト化の導入と基本的性質の確立、非線形ラプラス作用素の解の存在あるいは非存在についての例示などが揃う。このネットワークは、特別なものとして、p―ネットワークを含む、非常に広い範囲のノルム（非線形抵抗）を扱うものであることに注意する。

２．研究の目的
　モジュラ―列空間の枠組みから定まる非線形ネットワークの、エネルギー有限な関数空間とそれに付随して決まるコンパクト化である倉持境界理論を展開する。線形の場合は、確率過程・ランダムウォークとの関係に注目すべきである。非線形の場合は、非線形ポテンシャル論の手法を確立すべきである。p‐ノルムを特別なものとして含む、より一般のノルムによる関数空間を反映した理想境界の解析とその応用、とくに幾何の問題への応用の可能性を探る。
　重み付きリーマン多様体に対しても同様に重みに応じた倉持境界理論を展開し、その応用を目論む。離散に比べて、研究量・情報量は多いのであるが、非線形解析はたいへん難しいことが多く、問題を深く吟味する必要がある。

３．研究の方法
　１９８０年代から現在に至るまで発展しているリーマン多様体、あるいはより一般に測度距離空間の収束理論、スペクトル収束理論の発想、手法に着目する。ただし非線形作用素の場合には、まだいい成功例がなく、困難さが大きく増すので、基礎となる非線形ポテンシャル論の確立を図りながら取り組む。

４．研究成果
【4-1】非再帰的ネットワークを考える。有界領域（有限連結部分集合）の境界には調和測度を付与しておく。この測度に関する二乗可積分関数のなすヒルベルト空間からそれ自身へのディリクレ‐ノイマン写像とよばれる作用素が定まる。これは境界上の関数に対して、それを領域内に調和に拡張し、その拡張関数の境界での法線方向微分（ネットワークでもこの概念が使える）を取ることによって定まる境界上の関数を対応させる写像のことである。境界上の関数に対して、そのノルム（の二乗）を調和に拡張した関数のディリクレエネルギーとすることによって、ディリクレ空間の構造が入り、それに付随した作用素がディリクレ‐ノイマン写像である。本研究において次のことを発見した。『増大しながら全体を覆いつくす有界領域の列において、各領域の境界とその上のディリクレ‐ノイマン写像は塩谷‐桑江の意味でモスコ収束する。その収束極限は、非再帰的ネットワークの倉持境界とその上のディリクレ空間に付随する作用素である。さらにグリーン関数が無限遠方でゼロに収束するとき、この収束は漸近コンパクトである。』ここでモスコ収束は、ディリクレ形式に関するある種の変分収束のことで、固有値、固有関数など作用素のスペクトルに関する収束が伴う。また、有界領域の境界上、
調和測度を考えることが本質的で、自然に考えられる測度（点測度）あるいはその正規化測度でディリクレ‐ノイマン作用素を考えたときには、収束等は期待できない。極限の倉持境界においても、調和測度の下でディリクレ形式が定まっている。その定義域に含まれる倉持境界上の関数は、ネットワーク上のディリクレエネルギー有限な調和関数に拡張され、その拡張した関数の倉持境界での“作用素としてみた法線方向微分”を取ることで、ディリクレ‐ノイマン作用素が定まる。これが収束極限に現れる作用素である。
　　ネットワーク上には、抵抗形式とよばれるディリクレ（エネルギー）形式は一意的には決まらない。最小な形式（wired class)と最大なもの(free)が以前から研究されてきた。何も断らなければ、通常最大の形式が扱われる。しかし最大なものと最小なものとの差は、ディリクレエネルギー有限な調和関数の空間で表現され、この空間が自明でなければ、最小と最大の間に様々な抵抗形式が存在し得る。上述のデリクレイ形式の収束は、最大の形式について述べたものであ

る。それ以外の抵抗形式に対しても、モスコ収束が現れる。実際有界領域の境界上の関数を領域の内部ではなくネットワーク全体で定義された、与えられた抵抗形式の定義域内の関数に拡張を考えて、その関数の抵抗形式での値でもって有界領域の境界上のディリクレ形式を定めることができる。このようにして得られるディリクレ空間の極限が、抵抗形式に関する倉持境界で表現されるのである。言い換えれば、抵抗形式ごとに上述の収束現象があることになる。有効抵抗（合成抵抗）と有効形式は、J. Kigami によるフラクタル集合の理論の中で収束位相を与え、理論で重要な役割を果たす。上述のような収束現象にも有効抵抗は本質的に関わっており、ネットワーク特有の現象が現れるところである。

【4-2】非再帰的重み付きリーマン多様体を考える。その理想境界として、倉持境界を考える。ディリクレエネルギー有限な関数は倉持境界へのトレースを持ち、それを境界値とする関数の中で最小のディリクレエネルギーをもつものがただ一つ存在し、それはディリクレエネルギー有限な調和関数である。そのエネルギーを境界値関数のエネルギーとして定めることによって、倉持境界上の誘導ディリクレ形式が定まる。また、コンパクトで滑らかな超曲面で囲まれた正則領域に対しても、その境界上の関数空間に同様の方法で誘導ディクレ形式が定まる。これらはネットワークの場合と同様である。　本研究の主結果として、次のことを証明した。『増大しながら全体を覆いつくす有界正則領域の列において、各領域の境界とその上のディリクレ‐ノイマン写像は桑江‐塩谷の意味でモスコ収束する。その収束極限は、非再帰的重み付きリーマン多様体の倉持境界とその上のディリクレ空間に付随する作用素である。さらにグリーン関数が無限遠方でゼロに収束するとき、この収束は漸近コンパクトである。』　エネルギー有限な関数は拡散過程に沿ってほとんど確実に有限の値に収束することが知られている。これから拡散過程は倉持境界に収束することが確かめられ、関数の極限値は、拡散過程の収束点での関数のトレースの取る値になる。これらによって、倉持コンパクト化は、ディリクレエネルギー有限な関数空間を表現するものであることが明確になった。対象を関数からエネルギー有限な写像へと広げて考えるとき、その無限遠点での挙動把握には、倉持境界での振る舞いをいかに捉えるかが問題となる。

以上の考察と結果は、無限ネットワークに対しても同ように成り立つことを見たが、状況が異なるため、技術的な面での相違が現れる。

【4-3】モジュラー列空間の枠組みにおける非線形抵抗ネットワークの非線形ポテンシャル論の展開として、エネルギー有限な関数の族から生成される無限ネットワークの（重み付きグラフ）のロイデン型あるいは倉持型の理想境界上のディリクレ境界値問題を取り上げる。非線形ネットワークでは、関数に作用するラプラス型の作用素が定まり、この作用素に関するポアソン方程式の解の研究が重要であるが、本研究では、理想境界上の与えられた関数を境界値とする解が存在するかどうか調べるディリクレ境界値問題を中心に考察を行う。主結果は、この問題に対して、ペロン法が適用できるというものである、すなわち理想境界上の任意の連続関数が可解であることを証明する。

一般にペロン法で得られた解が与えられた境界値を取るかどうかはわからない。解の挙動に関する境界の正則性が問題となる。有限台を持つ関数全体の完備化のなすバナッハ空間の元（関数）がすべて有界であるという条件の下では、理想境界のすべての点は正則であることを証明した。この条件は、グラフの各頂点の容量が下から一様に抑えられていることと同値であり、したがってネットワークのスペクトルギャップが正であるという条件から保証されるものである。このような事実を明示したことが本研究の特徴の一つである。この条件が成り立たない場合にもペロン解の境界挙動について調べるために、境界の集合の容量を導入し、かた、境界に収束する道の族に対する極値的長さという概念を導入した。この結果、境界点のほとんどいたるところの点でペロン解の収束、ほとんどすべての道に沿うペロン解の収束などを明らかにした。

【4‐4】モジュラー列空間の枠組みにおける非線形抵抗ネットワーク上のラプラシアンに関するポテンシャル論の展開を行う。ある条件を満たす非線形ポテンシャル項付きラプラシアンを考え、その作用素のリウヴィユ性、カジミンスキ条件、
大森‐ヤウ型の弱最大値原理の成立が互いに同値であることを明らかにした。放物性のための十分条件を新鮮な形で提供した。

背景を説明する。リーマン多様体上のα‐調和関数のリウヴィユ性、確率的完備性に関するカジミンスキの１９６０年の研究が始まりで、１９９８年のA. グリゴーリアンの重要な研究と、その後のピゴラ、リゴリ、ゼッティ３人の共同による、大森‐ヤウ型の弱最大値原理の成立という新しい視点からの研究が加わり、さらに、マリ‐ヴァルトルタの最近の研究によって、α‐調和関数を超えて、ある種の非線形ポテンシャル項を持つ p-ラプラス方程式の解にまで拡張できることが明らかになった。一方、リーマン多様体からネットワーク（重み付きグラフ）に視点を変えて、ヴォイチェホフスキは、線形抵抗ネットワーク上のα‐調和関数に関するグリゴーリアンの結果の類似結果を証明した。このような状況の中で、線形ラプラシアン、p－ラプラシアンを非常に特別なものなものとして含む、モジュラー列空間の枠組みにおける非線形抵抗ネットワーク上のラプラシアンに対して、より明確な形で、３つの性質の同値性が成り立つことを確立した。また、それぞれの性質を与える十分条件について、詳しく論じた。対称性を持ったモデルネットワークでは、必要かつ十分な条件も与え、比較手法を用いた。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計3件（うち査読付論文　3件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Atsushi Kasue	４．巻 24
２．論文標題 Resolutive ideal boundaries of nonlinear resistive networks	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Positivity	６．最初と最後の頁 151 - 196
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11117-019-00672-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Atsushi Kasue	４．巻 47
２．論文標題 Convergence of Dirichlet forms induced on boundaries of transient networks	５．発行年 2017年
３．雑誌名 Potential Analysis	６．最初と最後の頁 189-233
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11118-017-9613-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Atsushi　Kasue	４．巻 45
２．論文標題 A. Thomson's principle and a Rayleigh's monotonicity law on nonlinear networks	５．発行年 2016年
３．雑誌名 Potential Analysis	６．最初と最後の頁 655-701
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11118-016-9562-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計4件（うち招待講演　4件／うち国際学会　4件）

１．発表者名 Atsushi Kasue
２．発表標題 Dirichlet fnite p-harmonic functions on graphs and manifolds
３．学会等名 Global properties in potential theory of continuous and discrete spaces（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2017年

〔その他〕 (continued)

1．発表者名 Atsushi Kasue
2．発表標題 Convergence of Dirichlet forms induced on boundaries of nonparabolic weighted Riemannian manifolds
3．学会等名 Dirichlet forms and their geometry（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2017年

1．発表者名 Atsushi Kasue
2．発表標題 Ideal boundaries of open Riemannian manifolds and convergence of induced Dirichlet forms
3．学会等名 The 22nd Symposium on Complex Geometry（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2016年

1．発表者名 Atsushi Kasue
2．発表標題 Ideal boundaries of open Riemannian manifolds and convergence of induced Dirichlet forms
3．学会等名 Geometry and Probability（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2016年

〔図書〕　計1件

1．著者名 加須栄篤	4．発行年 2019年
2．出版社 共立出版	5．総ページ数 206
3．書名 ベクトル解析	

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究分担者	服部　多恵 (Hattori Tae) (40569365)	石川工業高等専門学校・一般教育科・講師 (53301)	