

令和元年6月13日現在

機関番号：15201

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05131

研究課題名(和文) 非退化閉2次微分形式を用いたコンパクト複素等質多様体の研究

研究課題名(英文) Compact complex homogeneous manifolds with non-degenerate closed 2-forms

研究代表者

山田 拓身 (Yamada, Takumi)

島根大学・学術研究院理工学系・准教授

研究者番号：40403117

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,900,000円

研究成果の概要(和文)：非退化閉2次微分形式を用いてコンパクト複素等質空間について研究をおこなった。特にベキ零多様体上の不変な複素構造とホッジ数の関係をいくつか得た。実部分リー環分解をもつ実リー環を複素化し、複素化で得られた複素リー群を実リー群とみなすことで、分解に付随した左不変複素構造をリー群上に構成する方法を得た。さらにすべての左不変複素構造がその方法でできることを示した。また、不変複素構造をもつベキ零多様体上の正則ベクトル場のなすリー環とドルボーコホモロジー群との同型を見つけ、擬ケーラー構造をもつための必要条件が得られた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ケーラー等質多様体に関しては多くの研究があり、複素幾何的構造もよくわかっている。一方、非ケーラー等質多様体についてはあまりわかっていない。本研究成果の意義は、非ケーラーである複素ベキ零多様体において、ホッジ数や正則ベクトル場のなすリー環、擬ケーラー構造のはいるための必要条件などの複素幾何的構造がわかったことである。

研究成果の概要(英文)：I studied compact complex homogenous manifolds by using non-degenerate closed 2-forms. In particular, I had results on relations between invariant complex structures and Hodge numbers on compact nilmanifolds. I also had a homeomorphism between the Lie algebra of the holomorphic vector fields and a Dolbeault cohomology group on a compact complex nilmanifold. As an application, I had a necessary condition for admitting pseudo-koehler metric on a compact complex nilmanifold.

研究分野：微分幾何学

キーワード：等質空間 リー群 リー環 複素構造 ホッジ数 擬ケーラー構造 正則シンプレクティック構造 ベキ零多様体

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) 1957年に松島与三によりコンパクト等質ケーラー多様体(複素構造とケーラー構造の両方を保つ群が推移的に作用する複素多様体)は、複素多様体として旗多様体と複素トーラスの直積に正則同型となることが示された。さらに1961年にBorel-Remmertによりコンパクト等質複素多様体(複素構造を保つ群が推移的に作用する複素多様体)がケーラー構造をもつ場合に拡張された。

(2) 1976年にサーストンにより、ケーラー構造をもたないコンパクトシンプレクティック多様体の最初の例がベキ零多様(ベキ零リー群が推移的に作用する多様体)体で構成された。小平-サーストン多様体は等質複素多様体ではないが、複素構造をもつ等質多様体になる。このような多様体を複素等質多様体とよばれる。

(3) 1989年にDorfmeister-D.Guanによりコンパクト等質擬ケーラー複素多様体は複素多様体として旗多様体と複素トーラスの直積に正則同型となることが示された。また、80年代から2010年頃まで、Fernandezらは、擬ケーラー構造、局所共形ケーラー構造等をもつコンパクト複素多様体の例を可解多様体でいくつか構成した。

(4) 神島芳宣氏、長谷川敬三氏、沢井洋氏による局所共形ケーラー構造をもつ多様体の研究、鎌田博行氏のニュートラル・ケーラー構造をもつ多様体の研究などの研究が行われていた。Fino-Console、糟谷久矢氏の可解多様体のDolbeaultコホモロジー群のリー環をもちいたモデルの構成があった。

(5) 研究代表者の結果として、ケーラー構造のときと異なり、擬ケーラー構造をもつが、複素トーラスでない複素平行可能多様体(正則ベクトル束が自明)の例を構成し、擬ケーラー構造が存在するための必要条件をいくつか与えていた。さらに擬ケーラー構造をもつコンパクト複素平行可能可解多様体のDolbeaultコホモロジー群を決定し、可解リー環の導来環は可換であることを示した。

2. 研究の目的

(1) 非退化閉2次形式をもつコンパクト可解多様体の系列的な新しい例の構成、またもっと一般の非退化閉2次形式をもつコンパクト等質多様体における例を構成する。

(2) コンパクトベキ零多様体における複素構造のモジュライ空間の非退化閉2次形式、Dolbeaultコホモロジー群を用いた理論を構築する。

(3) 擬ケーラー構造等をもつコンパクトベキ零複素等質多様体、コンパクト可解複素等質多様体などの複素ベクトル場のなすリー環の構造、および複素幾何学的構造について研究する。

3. 研究の方法

(1) ベキ零多様体の系列的な例の構成を研究する。またベキ零多様体について非退化閉2次形式の存在とホッジ数との関係について研究する。

(2) 擬ケーラー構造などの非退化閉2次形式をもつベキ零複素多様体の正則ベクトル場のなすリー環に関する研究やそのようなベキ零多様体の複素幾何学的構造に関する研究をする。

(3) 可解多様体の例の構成、特に可解リー群が余コンパクト離散部分群をもつための条件について研究をする。また、可解多様体、一般の等質空間の場合にベキ零多様体の場合を研究する。

4. 研究成果

(1) 複素ハイゼンベルグ群はA型のルート系から構成できることに着目し、A型のルート系から系列的に構成できるコンパクトベキ零多様体の不変複素構造とホッジ数に関しても、複素ハイゼンベルグ群の場合と同様不変複素構造とホッジ数の関係に関する結果が成り立つことを示した。

(2) 半直積分解が1つ与えられた実リー群をまず複素化し、複素化で得られた複素リー群を実リー群とみなすことで、分解に付随した左不変複素構造を構成できることを示した。半直積分解をもつ実リー群の構成が複素構造の構成において重要となるが、それについてt-ルートをを用いて系列的に構成できることがわかった。

(3) 半直積分解をもつ実リー群が作用される部分リー環が可換な場合には、それから構成された不変複素構造をもつコンパクトベキ零多様体の各々のホッジ数が、複素化で得られる複素リー群のコホモロジーを用いて計算できることを示した。

(4)離散部分群に関して有理的な不変複素構造をもつコンパクトベキ零多様体が擬ケーラー構造をもつための必要条件を、正則ベクトル場のなすリー環の次元とホッジ数との関係に関する条件式で得られた。また一般化された旗多様体上の擬ケーラー計量の指数と対応する t -ルート系との関連が詳しくわかった。

(5)ある種のリー環の複素構造に対応するリー群の複素座標系の具体的な計算方法が得られ、変形空間の計算方法が得られた。

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 6 件)

1 Yamada, Takumi, Complex structures on the complexification of a real Lie algebra. Complex Manifolds 5 (2018), no. 1, 150–157

DOI: <https://doi.org/10.1515/coma-2018-0010>

2 Yamada, Takumi, Some relations between Hodge numbers and invariant complex structures on compact nilmanifolds. Complex Manifolds 4 (2017), no. 1, 73–83.

DOI: <https://doi.org/10.1515/coma-2017-0006>

3 Yamada, Takumi, Complex structures and non-degenerate closed 2-forms of compact real parallelizable nilmanifolds. Osaka J. Math. 54 (2017), no. 1, 121–128.

4 Yamada, Takumi, Remarks on Hodge numbers and invariant complex structures of compact nilmanifolds. Complex Manifolds 3 (2016), no. 1, 271–281.

DOI: <https://doi.org/10.1515/coma-2016-0014>

5 Yamada, Takumi, A construction of lattices in splittable solvable Lie groups. Kodai Math. J. 39 (2016), no. 2, 378–388.

DOI:

6 Yamada, Takumi, Hodge numbers and invariant complex structures of compact nilmanifolds. Complex Manifolds 3 (2016), no. 1, 193–206.

DOI: <https://doi.org/10.1515/coma-2016-0007>

〔学会発表〕(計 4 件)

1 山田 拓身, Complex structures on complexification of a real Lie algebras, RIMS 共同研究(公開型) 部分多様体の幾何学の深化と展開, 2018

2 山田 拓身, Invariant complex structures on compact nilmanifolds, Workshop on Geometry in Oita, 2017

3 山田 拓身, Invariant complex structures and Hodge numbers on compact nilmanifolds, 広島微分幾何学研究会, 2016

4 山田 拓身, Remarks on Hodge numbers and invariant complex structures of compact nilmanifolds, RIMS 研究集会 部分多様体の微分幾何学的研究, 2016

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年:

国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年:

国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

6 . 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号（8桁）：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。