

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 2 年 7 月 10 日現在

機関番号：17201

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05134

研究課題名(和文) 周期的極小曲面の安定性およびその極限の研究

研究課題名(英文) Study of stability of periodic minimal surfaces and their limits

研究代表者

庄田 敏宏 (Shoda, Toshihiro)

佐賀大学・教育学部・准教授

研究者番号：10432957

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：3次元ユークリッド空間内の周期的極小曲面は界面活性剤の膜の数学的モデルであることが知られており、1990年代に物理学者たちが様々な変形族を考察している。一方、極小曲面の安定性は面積最小性によって記述されてきた。特に1984年にBarbosa-doCarmoによって精錬された体積保存安定性による考察が有力視される。本研究課題によって物理学者たちが扱ってきた変形族に対して体積保存安定の状態を特定することができた。また、界面活性剤の膜の温度を変化させるとラメラ構造と呼ばれる、平面が周期的に並ぶ膜に変位することが知られている。このラメラ構造が三重周期的な極小曲面の極限として記述できるという示唆を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

界面活性剤の膜の変化の仕方・規則性を数学的に記述することにより、自然現象を解明するというのが本研究課題の意図である。膜は一時的な変化の後に安定した状態になる。この安定した状態が体積保存安定性によって記述できると考え、物理学者たちが考察してきた変形族の体積保存安定性を特定したというのが本研究である。また、界面活性剤の膜の温度を変化させた際に起こる膜の変異が三重周期的な極小曲面の極限として記述されると考え、特殊な場合の極限を特定することによりその変異に類似した対象を得た。これにより、膜の変異の理論的必然性の示唆が得られたと考える。

研究成果の概要(英文)：Periodic minimal surfaces in the Euclidean three-space can be considered as a mathematical model for surfactant in the soft matter. In 1990s, physicists considered many families of triply periodic minimal surfaces. On the other hand, a stability of a minimal surface has been studied via area minimizing situation. In particular, Barbosa-doCarmo's technique related to volume preserving stability might be useful tool for this situation. By this study, we find out volume preserving stability for some families which physicists considered. Moreover, we gave mathematical description of lamellar phases in the soft matter as limits of triply periodic minimal surfaces.

研究分野：極小曲面

キーワード：三重周期的な極小曲面 体積保存安定性

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

3次元ユークリッド空間内の三重周期的な極小曲面は界面活性剤の膜の数学的モデルであることが知られており、物理・化学・結晶学などの分野で研究されている。実際、1990年代に物理学者たちが三重周期的な極小曲面の変形族を数多構成している。

膜は一時的な変化の後に最終的に安定した状態になる。この安定した状態を膜を構成する曲面の面積の最小性によって記述するというのが微分幾何学ではよく知られた道筋である。極小曲面には面積最小の状態からの距離を表す Morse 指数と退化次数という幾何学的不変量が知られている。しかし、三重周期的な極小曲面の Morse 指数と退化次数は、1990年代の Ross および Montiel-Ros による研究で、Schwarz の Primitive 曲面、Diamond 曲面、CLP 曲面および tCLP 族、Schoen の Gyroid しか計算されていなかった。特に、Ross による研究は 1984 年に Barbosa-doCarmo が精練した体積保存安定性に関する結果であったが、その後の進展はなかった。なお、体積保存安定な極小曲面とは、曲面がその内部に囲う体積を一定にした変形に対して、面積の第二変分が非負になるような極小曲面のことである。これはシャボン玉が球面を形作る数学的根拠と関連した安定性である。

一方、界面活性剤の膜の温度を変化させるとラメラ構造とよばれる、平面が周期的に立ち並ぶ現象に変位することがソフトマターでは知られている。この自然現象の数学的記述がなされていなかった。

### 2. 研究の目的

こうした自然現象を数学的に記述することが本研究の目的である。

まず、上述の物理学者たちが構成した変形族の Morse 指数と退化次数を特定することが自然現象を数学的に記述する第一歩であると考え、これを最初の課題とした。次に、上述した体積保存安定性によって先述の変形族の振る舞いを調べることを第二の課題とした。この二つによって、界面活性剤の膜の変形が体積保存安定性によって記述できると考えられる。また、ラメラ構造の数学的根拠を示すため、三重周期的な極小曲面の極限の構造を調べることをさらなる課題とした。

### 3. 研究の方法

まず変形族の幾何学的不変量の計算に関しては、名城大学の江尻典雄氏の理論が有力である。氏の理論を適用するためには、三重周期的な極小曲面それぞれの標準ホモロジー基底およびそれによる第二種微分の周期行列を決定する必要がある、そこが主な難所である。また、体積保存安定性に関しては Ross によるアルゴリズムが有力であり、Ross の議論をどのように適用するかが課題となる。

三重周期的な極小曲面の極限に関しては、極小曲面の表現公式から極限の候補を抽出し、二重周期的な極小曲面や一重周期的な極小曲面に関する分類定理を駆使して、構造を解明した。

### 4. 研究成果

三重周期的な極小曲面の変形族のうち、H 族、rPD 族、tP 族、tD 族、tCLP 族とよばれる一助変数変形族の Morse 指数と退化次数、そして新しい不変量である符号数を特定した。その研究論文は微分幾何学で著名な国際誌に掲載された。特に、Morse 指数は 1, 2, 3 の三種類しか現れなかった。上述の変形族たちは種数が 3 のものであるが、今回の結果から、種数 3 の場合の Morse 指数は 1, 2, 3 の 3 種類しかないであろうという予想を打ち立て、今後の重要課題を得た。次に、これらの変形族のうち、Morse 指数が 1 のものはすべて体積保存安定であることを示した。これは Ross の結果を含む成果である。また、1990年代に物理学者たちが構成した変形族は、体積保存安定性を保ったまま変形されるであろうという予想も得られ、前述した予想とは別の指針を得た。

三重周期的な極小曲面の極限に関しては、種数 3 の自己交叉をもたない三重周期的な極小曲面の表現公式から始まって、その Riemann 面を崩壊させたときの表現公式の極限を考察した。結果的に、自己交叉をもたない二重周期的な極小曲面や一重周期的な極小曲面がその極限の候補として現れ、それぞれの分類定理を用いることによって、2007年に Rodriguez が構成した二重周期的な極小曲面の標準例および 1989年に Karcher が構成した一重周期的な極小曲面が出現することを示した。この中には Riemann が 1800年代に構成した、平面が平行に立ち並ぶように見える極小曲面が含まれており、これがラメラ構造を示唆していると考えられる。なお、この結果をまとめた研究論文はインパクトファクターが高いイタリアの国際誌に掲載された。

一方、本研究に関連した極小曲面の Morse 指数の計算方法が、閉曲面上のラプラシアン固有値問題に関する予想を解決する糸口となった。閉曲面上の計量で面積を一定にするようなものの中で、ラプラシアン固有値を最大にするようなものの存在を問う問題が、ラプラシアンの固有値に関する等周問題といわれている。1970年に Hersch によって種数 0 の場合が解決され、1996年に Nadirashvili が種数 1 の場合を解決した。2005年に Jakobson-Levitin-Nadirashvili-Nigam-Polterovich が種数 2 の場合の予想を提唱したが、この予想が極小曲面の Morse 指数の理論と関係していることを名古屋大学の納谷信氏が見抜き、後者の手法で証明することを提唱していた。実際、その予想と Morse 指数が 1 であることが同値であり、Morse 指数の計算方法には納谷氏が 1990年代に確立した道順があるので手が付けられる。しかし、その手法

は Riemann 面の周期計算が難所であり，高種数の場合の周期計算のノウハウがあった筆者との共同研究に発展した．果たして，その手法によって予想を解決することができ，フランス学士院が刊行している国際誌に掲載される運びとなった．この研究論文は既に多くの高質の論文に引用されている．

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Ejiri Norio, Fujimori Shoichi, Shoda Toshihiro	4. 巻 197
2. 論文標題 On limits of triply periodic minimal surfaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923 -)	6. 最初と最後の頁 1739 ~ 1748
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1007/s10231-018-0746-8">https://doi.org/10.1007/s10231-018-0746-8</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Norio Ejiri, Shoichi Fujimori, Toshihiro Shoda	4. 巻 35
2. 論文標題 A construction of a two-parameter family of triply periodic minimal surfaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Kobe Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 45-83
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Miyuki KOISO, Paolo PICCIONE & Toshihiro SHODA	4. 巻 68
2. 論文標題 On bifurcation and local rigidity of triply periodic minimal surface in $R^3$	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Ann. Inst. Fourier, Grenoble	6. 最初と最後の頁 2743-2778
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Nayatani Shin, Shoda Toshihiro	4. 巻 357
2. 論文標題 Metrics on a closed surface of genus two which maximize the first eigenvalue of the Laplacian	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Comptes Rendus Mathématique	6. 最初と最後の頁 84 ~ 98
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1016/j.crma.2018.11.008">https://doi.org/10.1016/j.crma.2018.11.008</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 江尻典雄・庄田敏宏	4. 巻 58
2. 論文標題 The Morse index of a triply periodic minimal surface	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Differential Geometry and its Applications	6. 最初と最後の頁 177--201
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2018.01.006">https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2018.01.006</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ejiri Norio, Shoda Toshihiro	4. 巻 67
2. 論文標題 Stability of triply periodic minimal surfaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Differential Geometry and its Applications	6. 最初と最後の頁 101555 ~ 101555
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2019.101555">https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2019.101555</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計9件 (うち招待講演 8件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 庄田敏宏
2. 発表標題 Laplacianの第一固有値の上限を与える閉曲面上の計量について
3. 学会等名 京都大学数理研研究集会「部分多様体の幾何学の深化と展開」(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 庄田敏宏
2. 発表標題 閉曲面上のラプラシアンに関するある種の不等式について
3. 学会等名 第64回幾何学シンポジウム(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 庄田敏宏
2. 発表標題 閉曲面上におけるラプラシアン的第一固有値の上限について
3. 学会等名 部分多様体論・湯沢2017 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 庄田敏宏
2. 発表標題 種数 2 の閉曲面上における Laplacian の第一固有値に対する Yang-Yau の不等式について
3. 学会等名 名城大学研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 庄田敏宏
2. 発表標題 ラプラシアン の第 1 固有値を最大化する種数 2 閉曲面上の計量
3. 学会等名 日本数学会 2018年度年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 庄田敏宏
2. 発表標題 Jacobi 多様体による三重周期極小曲面の変形族の構成について
3. 学会等名 水戸幾何小研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 庄田敏宏
2. 発表標題 Abel-Jacobi写像による三重周期極小曲面の2助変数変形族の構成について
3. 学会等名 淡路島幾何学研究集会2017 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 庄田敏宏
2. 発表標題 Abel-Jacobi写像による極小曲面の変形族の構成について
3. 学会等名 名城大学研究集会「多様体上の計量と幾何構造」(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 庄田敏宏
2. 発表標題 On sharpness of the Yang-Yau inequality for the genus two case
3. 学会等名 RIMS workshop 「Geometric Aspects of Solutions to Partial Differential Equations」(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

業績リスト <a href="http://extwww.cc.saga-u.ac.jp/~tshoda/shoda-home-j.html">http://extwww.cc.saga-u.ac.jp/~tshoda/shoda-home-j.html</a>
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----