

令和 2 年 4 月 10 日現在

機関番号：12501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05136

研究課題名(和文) ユークリッド空間のコンパクト部分多様体のポテンシャルとエネルギーの研究

研究課題名(英文) Potentials and energies of compact submanifolds of Euclidean spaces

研究代表者

今井 淳 (O'Hara, Jun)

千葉大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号：70221132

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：Mをユークリッド空間のコンパクト部分多様体とする。zを複素数とし、 $M \times M$ 上距離のz乗の積分をzの関数と考え、解析接続により1位の極のみを持つ有理型関数が得られる。これをMのBrylinskiベータ関数とよぶ。この関数とその留数の性質、およびそれらからMの幾何がどの程度わかるか、ということが研究の主目的であった。ソラネス氏との共同研究で、Mが奇数次元閉部分多様体であるか、偶数次元のコンパクトボディ(全空間と同じ次元の多様体)の場合は、zが多様体の次元mの-2倍のときBrylinskiベータ関数の値(これはMのRiesz(-2m)-エネルギーである)はメビウス変換で不変であることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

多様体のRieszエネルギーは研究代表者が与えた結び目のエネルギーの自然な拡張である。解析接続を用いることにより、多様体に対して、エネルギーと多様体のBrylinskiベータ関数の留数という2系統の量が得られた。留数の例としては、曲面のWillmoreエネルギーがある。エネルギーという大域的な量と、留数という局所的な量を積分して得られる量という、共に幾何学的に重要な量を導入し、その重要性の一部(メビウス群に関する対称性、球体の同定など)を示すことができたことが、本研究の一番大きな学術的意義である。また、研究手法自体も、電磁気学のインダクタンスを単一回路で考えたものの発散を除くことに応用できる。

研究成果の概要(英文)：Let M be an m -dimensional compact submanifold of an n -dimensional Euclidean space. Let $B(z)$ be the integral of the distance between a pair of points x and y in M to the power z over the product space M times M . Consider $B(z)$ as a function of a complex variable z . By a meromorphic regularization, i.e. the regularization via analytic continuation we obtain a meromorphic function with simple poles, called Brylinski beta function of M . If M is an odd dimensional closed submanifold or an even dimensional compact body (closure of an open set of the Euclidean space) then the value of $B(z)$ with z being equal to $-2m$ is invariant under Mobius transformations. This result was obtained in the joint work with Gil Solanes.

We obtain regularized self-inductance of a current in a single loop by applying our method to Neumann formula and Weber formula for mutual inductances. We also studied Mobius invariant metrics on the space of knots.

研究分野：幾何

キーワード：ポテンシャル エネルギー 正則化 メビウス不変性 インダクタンス

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

本研究の出発点は、約 25 年前に導入した結び目のエネルギーである(J. O'Hara, Topology 30 (1991))。これは、結び目全体の空間上にエネルギーを定義し、各結び目型の中でエネルギーを最小とするものとしてその結び目型の「最適な形」を定めることができるか、という問題(福原、作間)に端を発している。この問題意識のため、結び目のエネルギーは、幾何学的な複雑さを測る(従って結び目不変量ではない)量で、(曲率のように局所的に決まるものの積分ではない)大域的であり、結び目が自己交叉しようとする無限大に発散する。結び目 K とし、 $K \times K$ 上距離の(-2)乗の積分(発散する)から後述の方法で有限の値を取り出すことにより得られる。

その後、結び目・曲面に対する新しいエネルギーなど、様々な拡張がなされた。

2. 研究の目的

M をユークリッド空間のコンパクト部分多様体(特に結び目、曲面といった閉部分多様体、または全空間と同じ次元で境界を持つもの)とし、 $M \times M$ 上二点間の距離の z 乗を積分したものを考える。この積分が発散する場合には、超関数論の研究でやられるように Hadamard の有限部分をとる。この結果得られるものを、 M の **Riesz z -エネルギー** という。一方、 z を複素変数として、積分を z の関数と考え、解析接続を用いると 1 位の極のみを持つ有理型関数が得られる。これを M の **Brylinski ベータ関数** と呼ぶ。以上から、多様体 M に対して、Riesz エネルギーと、Brylinski ベータ関数の**留数**という二種類の量が得られる。この二種類の量を幾何学的観点から研究することが本研究の主目的である。前者は大域的でトポロジー的に興味深い量になり、後者は積分幾何学的に基本的重要性を持つ量になる。更に合同変換を除いてエネルギーが M をどの程度定めるか、という問題も考える。一方、点 x からの距離の z 乗の M 上の積分の有限部分を取るにより、その点の Riesz **ポテンシャル**の族が得られる。これの**最大点**(重心の一般化となる)の挙動(特に唯一性)を、PDE の解の幾何学的研究の手法を用いて研究する。

3. 研究の方法

数学的なこと: ソラネス氏との共同研究では、余面積公式、発散積分の Hadamard 正則化と解析接続を用いた正則化が同じものを与えるという、超関数論の成果、微分幾何・積分幾何の様々な成果を用いる。自己インダクタンスの正則化では、動標構を用いて定義される微分形式の性質が本質的に用いられる。結び目のメビウス不変な計量では、メビウス幾何学の成果と結び目のエネルギーで研究されてきた例を用いる。

数学以外: ソラネス氏との共同研究は、今井が 2017 年および 2019 年にそれぞれポーランド・ベンドレボおよびドイツ・イエーナでの国際研究集会に参加したときに議論し、その後メールでのやり取りで進めた。また、期間中に論文投稿は間に合わなかったが、福岡大学の坂田繁洋氏ともポテンシャルに絡んで幕凸性について共同研究をしており、これも議論のために旅費を使用した。

4. 研究成果

ソラネス氏との共同研究で、 M が奇数次元閉部分多様体であるか、偶数次元のコンパクトボディ(全空間と同じ次元の多様体)の場合は、 z が多様体の次元(m とする)の(-2)倍のとき Brylinski ベータ関数の値(これは M の Riesz $(-2m)$ -エネルギーである)はメビウス変換で不変であることを示した。

電磁気学の相互インダクタンスを与える Neumann の公式と Weber の公式を単一曲線回路に適用すると積分が発散するが、この研究の手法を用いて正則化すると、自己インダクタンスを数学的に定式化できる。

また、結び目のメビウス不変なエネルギーの定義にでてくる被積分関数を用いて、結び目の空間上にメビウス変換で不変な計量を定義した。これは、メビウス不変な汎関数の勾配の研究に役に立つ。

5. 下の「5. 主な発表論文等」への補足:

[雑誌論文](英語論文では、旧姓の O'Hara (大原)を使用)

アクセプトされたけれどもオンライン公開のみで紙の雑誌への掲載がまだのもの:

[Jun O'Hara](#), Mobius invariant metrics on the space of knots, to appear in Geom. Dedicata, DOI: 10.1007/s10711-020-00518-6

[Jun O'Hara](#) and Gil Solanes, Erratum to Regularized Riesz energies of submanifolds, to appear in Math. Nachr. DOI: 10.1002/mana.202000024

[Jun O'Hara](#), Regularization of Neumann and Weber formulae for inductance, Journal of Geometry and Physics 149 (2020), 10.1016/j.geomphys.2019.103567,

[学会発表] 新型コロナの影響で中止となったもの 2 件

(日本数学会では講演は成立したという扱いであるが、こちらに分けて記述する)

2020年3月18日 留数としての Willmore エネルギーの拡張、日本数学会年会幾何学分科会、日本大学(中止)

2020年3月17日 単一曲線の自己インダクタンス、日本数学会年会トポロジー分科会、日本大学(中止)

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件 / うち国際共著 2件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Jun O'Hara	4. 巻 292
2. 論文標題 Characterization of balls by generalized Riesz energy	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Mathematische Nachrichten	6. 最初と最後の頁 159-169
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1002/mana.201700256	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Jun O'Hara and Gil Solanes	4. 巻 291
2. 論文標題 Regularized Riesz energies of submanifolds	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Mathematische Nachrichten	6. 最初と最後の頁 1356-1373
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1002/mana.201600083	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kentaro Mikami, Jun O'Hara and Kunio Sugahara	4. 巻 72
2. 論文標題 Triangles with sides in arithmetic progression	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Elem. Math.	6. 最初と最後の頁 75-79
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/EM/327	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計10件（うち招待講演 4件 / うち国際学会 5件）

1. 発表者名 Jun O'Hara
2. 発表標題 Regularization of self-inductance
3. 学会等名 33rd Summer Conference on Topology and its Applications（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Jun O'Hara
2. 発表標題 Characterization of unit balls by Riesz energy
3. 学会等名 Convex, discrete and integral geometry (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Jun O'Hara
2. 発表標題 From energy of knots to regularized Riesz energy of submanifolds
3. 学会等名 The 12th East Asian School of Knots and Related Topics (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Jun O'Hara
2. 発表標題 Energy of knots in the 3-sphere
3. 学会等名 MARS Workshop, Salzburg (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Jun O'Hara
2. 発表標題 Mobius invariant metric on the knot space
3. 学会等名 Biology, Analysis, Geometry, Energies, Links [bagel19] (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 今井 淳
2. 発表標題 多様体の留数とエネルギー
3. 学会等名 多様体上の微分方程式、金沢（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 今井 淳
2. 発表標題 R^n の部分多様体のBrylinskiベータ関数
3. 学会等名 部分多様体・湯沢
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 今井 淳
2. 発表標題 R^n の部分多様体のRieszエネルギーの正則化と球体の特徴づけ
3. 学会等名 幾何学シンポジウム
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Jun O'Hara
<https://sites.google.com/site/junohara/home>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	ソラネス ジル (Solanes Gil)	パロセロナ自治大学・数学科・准教授	
研究協力者	ランジュヴァン レミ (Langevin Remi)	ブルゴーニュ大学・数学研究所・名誉教授	
研究協力者	石関 彩 (Ishizeki Aya)	千葉大学・理学部・学振PD (12501)	
連携研究者	坂田 繁洋 (Sakata Shigehiro) (30732937)	福岡大学・理学部・講師 (37111)	
連携研究者	長澤 壯之 (NAGASAWA Takeyuki) (70202223)	埼玉大学・理工学研究科・教授 (12401)	