

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 4 年 5 月 27 日現在

機関番号：32665

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2021

課題番号：16K05139

研究課題名(和文) 最近の計算代数統計学の進展に対する微分幾何学的展開

研究課題名(英文) Evolution of Differential Geometry with related to the recent progress of computational algebraic statistics

研究代表者

濱田 龍義 (HAMADA, Tatsuyoshi)

日本大学・生物資源科学部・教授

研究者番号：90299537

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では最近の計算代数統計学の進展に対する微分幾何学的展開を試みた。本研究の成果として、計算機代数とコンピュータビジョンの応用の一つとして、多肢選択式問題の作成に注目し、新たな手法の提案を行った。また、動的数学ソフトウェアに注目し、特にオンライン環境下での利用について提案を行った。最新の計算代数システムおよび可視化ソフトウェアを収録したDVD起動型 Live Linuxシステム MathLibre の開発を継続して行い、自由に利用できるように成果を公開している。MathLibreは数学ソフトウェアのライブアーカイブとしても重要である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

研究成果として公開している MathLibre はオープンソースソフトウェアの数学ソフトウェアを自由に利用できるコンピュータ環境である。第一線の研究ツールとしてだけでなく、大学や高校等の教育機関における教育ツールとして、さらに、近年、産業等に応用が広がっている数学の研究成果を可視化する役割も果たしている。元々は CD/DVD から起動する Live Linux として開発されてきたが、現在は仮想環境上での実行が主となっており、様々なコンピュータ環境で手軽に利用することが可能である。

研究成果の概要(英文)：In this research, we tried to evolve differential geometry with related to the recent progress of computational algebraic statistics. We proposed the new approach to make multiple choice exercises with computer algebra system. Moreover, we focused on Dynamic Geometry Software, especially, as an online education system. We proposed new educational contents about differential geometry and related topics. Moreover, we are developing DVD bootable Live Linux system "MathLibre". It contains various open source mathematical software and related documents. MathLibre is not only a research tool, it's a live archive of mathematical software.

研究分野：幾何学

キーワード：幾何学 部分多様体論 計算機代数 MathLibre

1. 研究開始当初の背景

計算代数統計学は 1988 年, Diaconis-Strumfels の論文によってトーリックイデアルとマルコフ基底の同値性が示されて以来, 急速に発展してきた. グレブナー基底等の計算代数学の結果が統計学に応用されると同時に, 統計学の問題意識が代数学の発展を誘導するという数学の異分野協働による進展が著しい分野である.

一方, 微分幾何学と統計学の関係については情報幾何学的な観点が重要である. 甘利俊一によって発展を遂げた情報幾何学では, 確率分布が作る空間が持つ幾何学的な構造に基づいて統計学の問題をとらえ理解することができる. 情報幾何学において, 確率分布族に導入される幾何構造を一般化したものを統計多様体と呼ぶ. これと同じ幾何構造がアフィン幾何学においても現れるため, アフィン幾何学と情報幾何学との間には密接な関係があることは周知の事実である.

現在, 応用分野において機械学習やニューラルネットワーク等の手法が注目を浴びているが, 情報幾何学はこれらの基盤となる理論でもある. 機械学習は人工知能の一分野として急速に発展してきた分野であるが, コンピュータビジョン, 画像解析, レコメンデーションシステム, 脳インターフェース等, 非常に幅広い分野への応用が行われている手法である.

このように理論, 応用, 両面において発展著しい 2 つの分野であるが, 竹村彰通, 日比孝之, 高山信毅を中心とし, 研究代表者も所属していた科学技術振興機構 CREST 研究チームによって, ホロノミック勾配降下法が提案された. ホロノミック勾配降下法は, 微分作用素環のグレブナー基底の理論, 微分方程式の数値解法, 統計的推定理論などを用いて, 統計的モデルの解析を行う手法として画期的なものであり, 応用面でも期待されている.

本研究はホロノミック勾配降下法を微分幾何学的な視点から観察したときに, どのような意味が見出されるかという問題意識を出発点としていた. アフィン幾何学や情報幾何学といった微分幾何学的な視点から計算代数統計学の手法を見直すことで, 新たな知見が得られることが見込まれた.

2. 研究の目的

本研究は発展著しい計算代数統計学の最近の成果に注目し, 微分幾何学的な視点から再検討を行う. 計算代数統計学は, トーリックイデアルとマルコフ基底の同値性が示されて以来, 急速に発展してきた分野である. 微分作用素環のグレブナー基底の理論, 微分方程式の数値解法, 統計的推定理論などを用いた画期的な統計的モデルの解析手法が開発されたが, 応用面でも期待されているこの手法について, 微分幾何学的な見地から再検討を行い, 最終的には計算代数統計学と情報幾何学という 2 つの流れを結ぶ理論の整備と新たな研究領域の構築を目指した.

3. 研究の方法

本研究の期間全体にわたる研究計画・方法は以下の通りである.

- 計算代数統計学の手法に関するアフィン幾何学的視点からの検討.
- 複素構造を持つ統計多様体の部分多様体について計算代数統計学の手法の適用.
- 対称空間内の部分多様体に対して, 計算代数の立場からリー環の計算への応用.
- 情報幾何学およびコンピュータビジョンとの連携.

4. 研究成果

(1) 計算機代数の応用

計算機代数システムとコンピュータビジョンとの連携の観点から, 龍谷大学の中川義行氏, 大阪産業大学の田村誠氏との共同研究としてマークシート選択式問題の誤答作成に取り組んだ. Alexis Bienvenue によって Auto Multiple Choice が 2008 年に公開され, 現在も開発が続けられている. Auto Multiple Choice は LaTeX による問題作成を支援するシステムであり, コンピュータビジョンにおける代表的なライブラリである OpenCV を利用してマークシート選択式問題の解答自動認識, および成績管理を行える. 本研究では, 次世代の TeX 実装である LuaTeX に注目した. LuaTeX は LaTeX 文書の中にプログラミング言語 Lua を手軽に埋め込むことができる. Lua 上で開発された計算機代数システムも幾つか存在するが, LuaTeX と計算機代数システムの組み合わせについては, いまのところ事例がほとんど知られていない. 類似の実装としては汎用計算機代数システム Sage のスクリプトを TeX に透過的に埋め込むことができる SageTeX が開発されていたが, 現在は開発が停滞しているようである. 印刷物をインターフェースとする計算機代数システムは高速なスキャナを介してコンピュータビジョンの研究成果と合わせることで新たな問題意識を研究分野にもたらすのではないかと考えている. 汎用計算機代数システム Maxima, Sage と Auto Multiple Choice を LuaTeX を介して組み合わせることで, 自由に選択式問題の選択肢を作成できるようになることを目指した. この研究結果については国際会議 ICMS2020 で発表され, Springer から論文が公開されている.

(2) 数学ソフトウェア環境の整備について

動的数学ソフトウェア GeoGebra は Markus Hohenwarter を中心として開発が進められ、世界中で教育支援ツールとして活用されている。最近では、教育支援ツールとしてだけでなく、研究支援ツールとしても認知されつつある。GeoGebra のように非専門家でも手軽に利用できる数学ソフトウェアの存在は代数統計学や深層学習における基礎的な概念を可視化する上でも重要なプロジェクトと捉えている。

動的数学ソフトウェアについては、大阪市立大学(現、大阪公立大学)で毎年実施している特別授業でも紹介しており、その成果については統計数理研究所の共同研究レポートとして公開している。そのほかにも動的数学ソフトウェアのスマートフォンへの対応や、教育用マイコンである micro:bit との連携などについて、統計数理研究所の共同研究レポートとして報告を行っている。また、2020 年度は新型コロナウイルス感染症の蔓延によって対面による講義を行えず、オンラインを中心とした教育が行われた。新たに実装された GeoGebra Classroom を利用することで、オンライン環境下においても学生の進捗を把握しつつ、演習を進める環境が整った。一方で、ニューラルネットワークを題材とした数学リメディアルについては Python の環境の一つである Anaconda を採用し、京都大学数理解析研究所において開催された共同研究「数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究」において報告を行っている。同様の問題から、オンライン環境下ではクラウドベースの Google Colaboratory を活用することで、効果的な演習環境を提供する見通しが立った。現在は、数学に関する基礎的な題材を紹介するツールとして研究を進めている。また、数式を含むインタラクティブなドキュメントの生成、マークダウン形式への対応という意味でも注目しており、関連する Jupyter Notebook 等への対応が重要であると思われる。

(3) MathLibre の展開

本研究の研究成果として、

- MathLibre 2017
- MathLibre 2018
- MathLibre 2019
- MathLibre 2020
- MathLibre 2022

を公開し、最新の数学ソフトウェアの紹介を進めている。なお、新型コロナウイルス感染症の蔓延に伴う対応に時間を取られたため、残念ながら MathLibre 2021 については公開することができなかった。2003 年以降、幾何学だけでなく、トポロジー、計算代数、統計理論、可換環論、数方程式論、数論、組合せ論、力学系、基礎論などの様々な数学諸分野の専門家と横断的に協力関係を築き、システムの充実を図ってきた。また、MathLibre は数学、数理科学分野における教育ツールとしても活用されている。今後、国内における計算機代数と数学、数理科学諸分野との連携、発展が期待される。

国際的に見ても、このような包括的な数学ソフトウェアプロジェクトは類を見ない。数学ソフトウェア環境の提供はもちろんだが、歴史的なアーカイブとしての役割も果たしている。例えば、平均曲率一定曲面を描画するためのツールとして知られる CMCLab の利用については、過去に作成した KNOPPIX/Math を仮想環境上で動かすことで実現できる。その時代にオープンソースソフトウェアとして提供されていた研究ツールを当時のままの環境で提供できるという点が特徴的である。

元々は CD/DVD 起動の Live Linux として開発をスタートしたが、現在は仮想環境上での実行が主となっている。仮想環境上で MathLibre を実現する手法についても複数の手段が検討されており、対応する CPU についても、i386 から amd64 系に移行し、現在は arm64 系 CPU についても検討を進めている。

(4) ワークショップ「数学ソフトウェアとフリードキュメント」の開催

数学ソフトウェアとフリードキュメントに関する情報を共有することを目的として、2005 年以来、継続してワークショップ「数学ソフトウェアとフリードキュメント」を開催している。本研究期間においても、第 30 回は学会開催が急遽中止されたことに伴い中止されたが、第 23 回から第 33 回まで、10 回にわたって開催することができた。取り扱った話題も、Computer Graphics における形状変形ライブラリや、オンライン広告における数理モデル、生命科学系公共データベース、パターンマッチ指向プログラミング、スペクトラルグラフ理論研究における数学ソフトウェアの活用、音楽配信サービスにおける推薦システムにおける数理モデル等、幅広く諸分野の専門家を招き、有意義な情報共有を行うことができたと考えている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 6件）

1. 著者名 Hamada Tatsuyoshi, Nakagawa Yoshiyuki, Tamura Makoto	4. 巻 12097
2. 論文標題 Method to Create Multiple Choice Exercises for Computer Algebra System	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematical Software - ICMS 2020	6. 最初と最後の頁 419-425
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-3-030-52200-1_41	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 濱田龍義, 中川義行	4. 巻 2142
2. 論文標題 マークシート選択式試験作成における数式処理の活用	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 108-116
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 濱田龍義	4. 巻 430
2. 論文標題 GeoGebra アプリの活用	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 統計数理研究所共同研究リポート	6. 最初と最後の頁 1-5
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 濱田龍義	4. 巻 2105
2. 論文標題 ニューラルネットワーク作成による数学学習の動機付け	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 89-98
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 濱田龍義	4. 巻 426
2. 論文標題 GeoGebra Global Gatheringの歩き方	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 統計数理研究所共同研究リポート	6. 最初と最後の頁 1-5
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 濱田龍義	4. 巻 396
2. 論文標題 micro:bit と GeoGebra の連携	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 統計数理研究所共同研究リポート 動的数学ソフトウェアGeoGebraの整備と普及 (3)	6. 最初と最後の頁 1--6
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 濱田龍義	4. 巻 391
2. 論文標題 GeoGebraのスマートフォン対応について	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 統計数理研究所共同研究リポート 動的幾何学ソフトウェアGeoGebraの整備と普及 (2)	6. 最初と最後の頁 1-5
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計2件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 濱田龍義, 中川義行
2. 発表標題 マークシート選択式問題における数式処理の活用
3. 学会等名 日本数式処理学会第28回大会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 濱田龍義
2. 発表標題 MathLibre 2018 について
3. 学会等名 日本数式処理学会第27回大会
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計2件

1. 著者名 齋藤夏雄, 井ノ口順一, 亀井聡, 鈴木登志雄, 芦野隆一, 薩摩順吉, 清智也, 竹山美宏, 福井敏純, 一樂重雄, 原一裕, 服部哲弥, 金森敬文, 森田茂之, 小磯憲史, 雪江明彦, 角皆宏, 柳田英二, 眞崎聡, 須川敏幸, 曾布川拓也, 鈴木登志雄, 寺杣友秀, 岡本吉央, 後藤四郎, 阿部紀行, 西野哲朗, 間瀬茂, 濱田龍義, 高橋哲也, 河東泰之, 池川隆司, 他	4. 発行年 2018年
2. 出版社 日本評論社	5. 総ページ数 190
3. 書名 数学ガイダンス2018	

1. 著者名 伊藤浩行, 井ノ口順一, 乙部巖己, 狩野 裕, 示野信一, 竹内慎吾, 八森正泰, 藤田博司, 山下 靖, 竹山美宏, 福井敏純, 一樂重雄, 竹山美宏, 市原一裕, 服部哲弥, 金森敬文, 逆井卓也, 石川剛郎, 森田茂之, 小磯憲史, 雪江明彦, 角皆宏, 柳田英二, 眞崎聡, 須川敏幸, 曾布川拓也, 鈴木登志雄, 後藤四郎, 阿部紀行, 西野哲朗, 間瀬茂, 濱田龍義, 他	4. 発行年 2017年
2. 出版社 日本評論社	5. 総ページ数 176
3. 書名 数学ガイダンス2017	

〔産業財産権〕

〔その他〕

MathLibre Project http://www.mathlibre.org/
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------