

令和 5 年 6 月 8 日現在

機関番号：12608  
研究種目：基盤研究(C)（一般）  
研究期間：2016～2022  
課題番号：16K05142  
研究課題名（和文）Lefschetzファイバー空間と4次元多様体

研究課題名（英文）Lefschetz fibrations and 4-manifolds

## 研究代表者

遠藤 久顕 (Endo, Hisaaki)

東京工業大学・理学院・教授

研究者番号：20323777

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,500,000円

研究成果の概要（和文）：4次元多様体と呼ばれる4次元の空間を位相幾何学（トポロジー）の観点から研究した。特に、4次元球面に埋め込まれた曲面（曲面絡み目）の外側の位相的な構造を知るために、円周値モース理論と呼ばれる道具を用いてファイバー束からのずれを測る量（モース・ノビコフ数）を定義し、その振る舞いを詳しく研究した。また、具体的な曲面絡み目について実際にモース・ノビコフ数を計算した。

## 研究成果の学術的意義や社会的意義

モース・ノビコフ数は古典的な絡み目（3次元球面に埋め込まれた複数の円周）に対して2001年に定義されていた。本研究では、モース・ノビコフ数を曲面絡み目やさらに高次元の絡み目に対して定義し、様々な性質を明らかにした。本研究に何らかの学術的意義があるとすれば、それは「高次元絡み目のモース・ノビコフ理論」とよべき新たな研究領域を拓いた点であろう。

研究成果の概要（英文）：We studied the topology of 4-dimensional spaces, which are called "4-manifolds". In particular, we defined and investigated the Morse-Novikov number of a surface-link (a surface embedded in the 4-dimensional sphere), which measures the difference between the complement of the surface-link and a fiber bundle. We then computed the values of the Morse-Novikov numbers of several examples of surface-links.

研究分野：位相幾何学

キーワード：曲面絡み目 Morse-Novikov理論 4次元多様体 Lefschetzファイバー空間 ファイバー構造 井上曲面  
複素多様体

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

4次元多様体のトポロジーは、1980年代初頭に現れた Freedman による単連結位相多様体の分類理論と Donaldson による反自己双対方程式の可微分多様体への応用によって、他の次元とは著しく異なる様相を呈していることが明らかにされた。Donaldson の理論の後も Seiberg-Witten 理論や Fintushel-Stern・Gompf による構成法の研究が現れ、4次元多様体の微分構造の多様性や交叉形式に関する制約などが示されている。しかし、幾何化予想をはじめ大きな予想が次々と解決されている3次元多様体のトポロジーに比べ、4次元多様体は単連結なものに限っても完全な分類には程遠いのが現状である。

Lefschetz ファイバー空間はもともと Lefschetz が非特異射影多様体のトポロジーを研究した際に導入した Lefschetz ペンシルに由来する概念である。4次元トポロジーにおいては、楕円曲面の微分同相類に関連して種数1の Lefschetz ファイバー空間が詳しく研究されていたが、1998年に Donaldson と Gompf により4次元シンプレクティック多様体との密接な関係が明らかにされるに至り、種数2以上の場合の研究が本格化した。4次元多様体に Lefschetz ファイバー空間の構造を考えることの利点は、モノドロミー表現を通して曲面の写像類群との密接な関係が生じることである。すなわち、4次元シンプレクティック多様体の位相幾何学的な研究が、写像類群の元の組み合わせ的な研究に帰着される。

研究代表者は松本幸夫氏(東京大学名誉教授)による種数2の場合の先駆的な研究に影響を受け、1997年頃に Donaldson や Gompf らとは独立に Lefschetz ファイバー空間の研究を開始した。初期の研究では、超楕円的 Lefschetz ファイバー空間の局所符号数公式や写像類群の関係子を用いた方法などにより、Lefschetz ファイバー空間の符号数の計算法を確立した。その後の研究では、モノドロミー置換や一般チャート理論とよばれる手法を詳しく研究し、Lefschetz ファイバー空間の構成的側面の解明に努めた。一方、国内外の研究動向に目を向けると、Lefschetz ファイバー空間の研究は様々な方向へ発展していることがわかる。とりわけ進展著しいのは、Seidel によって創められた(4次元とは限らない) Lefschetz ファイバー空間の有向深谷圏の研究や、3次元接触多様体のオープンブック分解や Stein 充填との関連などであろう。しかし、これらはむしろホモロジー的ミラー対称性や接触構造のほうに軸足があるように思われる。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、Lefschetz ファイバー空間を中心とする4次元多様体のトポロジーを解明することである。Lefschetz ファイバー空間の研究は4次元以外の次元においても広がりをみせているが、4次元トポロジーにおける Lefschetz ファイバー空間の重要性が減ったわけではない。応募者のこれまでの研究を深化・発展させ、Lefschetz ファイバー空間の位相構造・微分構造・不変量を、主に写像類群の表示・コサイクル・表現との関係から研究する。また、その他の4次元多様体に関する研究にも積極的に取り組む。具体的な研究課題として次の3つを挙げる。

- (1) Lefschetz ファイバー空間の構成法と分類に関する研究
- (2) Lefschetz ファイバー空間の新しい不変量の探求
- (3) 4次元トポロジーにおける新たな手法の開発や研究対象の創出

応募者のこれまでの研究は、Lefschetz ファイバー空間の符号数と構成法に関するものが主であった。一方、これら3つの課題では、Lefschetz ファイバー空間のより強い不変量の構成や同型類・微分同相類に関する分類、4次元トポロジーにおける新手法の開発などを旨とする。

## 3. 研究の方法

上記の項目2で述べた研究の目的を踏まえ、実際の研究を行う際に採った研究方法は以下のようなものである。

- (A) チャート表示を用いた Lefschetz ファイバー空間の同型判定および不変量の構成
- (B) 2次元結び目およびスライス円板への Morse-Novikov 理論の応用
- (C) ポッシュト手術の一般化とその性質の解明

これらの研究方法のうち、(A)は項目2の(1)、(2)に対応しており、(B)、(C)は項目2の(3)に対応している。

## 4. 研究成果

項目2で述べた3つの研究課題のうち、特に(3)に関して芳しい進展がみられた。また、(1)、(2)についても限定された状況のもとで一定の成果が得られた。(3)について、具体的に得られた結果を以下に詳述する。(1)、(2)については今後さらに研究を継続し、一定の成果が上がった後に公表する予定である。

Andrei Pajitnov 氏(ナント大学)と行った共同研究では、円周値 Morse 理論を曲面絡み目に適用することにより曲面絡み目の Morse-Novikov 数を定義し、その様々な性質を解明した。まず曲面が球面である場合に、曲面結び目のサドル数と Morse-Novikov 数の間に成立する不等式の証明、古典的結び目とそのスピン結び目の Morse-Novikov 数の比較定理の証明、曲面結び目の

Morse-Novikov 数の Novikov 捩れ数による評価などを行い、この研究領域の基礎を確立した。次に曲面が球面とは限らない場合に上記の諸結果を拡張し、さらに高次元化を行った。これらの研究により、ある種の曲面結び目の Morse-Novikov 数を決定することが可能となった。例えば、 $ch$  指数が 10 以下の 2 次元結び目は全部で 6 つあるが、そのうちの 5 つ ( $0_1, 8_1, 10_1, 10_2, 10_3$  と表記される 2 次元結び目) の Morse-Novikov 数は 0 であることが示された。残り 1 つの 2 次元結び目 (Fox 結び目と呼ばれるもので、 $9_1$  と表記されるもの) の Morse-Novikov 数も 2 または 4 であることまでわかっている。また、特定の性質を持つ 2 次元結び目の Morse-Novikov 数が完全に決定できる場合があることもわかった。例えば、トンネル数が 1 であるような非ファイバー結び目の スピン結び目の Morse-Novikov 数は必ず 4 であることが証明されている。

当初の計画にはなかったが、研究者どうしの議論から発展した以下の研究も実施した。

Andrei Pajitnov 氏 (ナント大学) との新しい共同研究により、既存のものとは異なる井上曲面の一般化を構成した。井上曲面は円周上の 3 次元トーラス束の構造を持っており、その一般化である Sankaran, Oeljeklaus-Toma, 申請者らの多様体は  $s$  次元トーラス上の  $N$  次元トーラス束の構造を持っている。従って、これらのファイバー束のモノドロミーは  $SL(N, \mathbb{Z})$  の互いに可換な  $s$  個の元から成る。Sankaran, Oeljeklaus-Toma らによる井上曲面の既存の一般化のモノドロミーはすべて対角化可能な行列であるが、研究代表者らの構成した多様体のモノドロミーは対角化可能であるとは限らず、その標準形は非自明なジョルダン細胞を持つことがある。この点が研究代表者らの新しい多様体の最も顕著な特徴と言える。

芥川和雄氏 (現・中央大学)・Harish Seshadri 氏 (インド理科大学院) との共同研究では、4 次元球面上の正の Einstein 計量の山辺不変量に関する Gursky の間隙定理を拡張した。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 4件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 H. Endo, A. Pajitnov	4. 巻 13
2. 論文標題 On generalized Inoue manifolds	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proceedings of the International Geometry Center	6. 最初と最後の頁 24-39
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.15673/tmgc.v13i4.1748	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 K. Akutagawa, H. Endo, H. Seshadri	4. 巻 373
2. 論文標題 A gap theorem for positive Einstein metrics on the four sphere	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 1329-1339
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00208-018-1749-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 遠藤久顕	4. 巻 69
2. 論文標題 Lefschetzファイバー空間	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 数学	6. 最初と最後の頁 157-180
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hisaaki Endo and Andrei Pajitnov	4. 巻 54
2. 論文標題 On the Morse-Novikov number for 2-knots	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 723-734
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Endo Hisaaki and Andrei Pajitnov	4. 巻 66
2. 論文標題 Circle-valued Morse theory for frame spun knots and surface-links	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 The Michigan Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 813-830
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1307/mmj/1508810816	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計7件 (うち招待講演 7件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 遠藤久顕
2. 発表標題 Inoue surfaces and their generalizations
3. 学会等名 Algebraic surfaces and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 遠藤久顕
2. 発表標題 Inoue surfaces and their generalizations
3. 学会等名 森本雅治先生退職記念研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 遠藤久顕
2. 発表標題 2次元結び目のモース・ノビコフ数について
3. 学会等名 東京大学火曜トポロジーセミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 遠藤久顕
2. 発表標題 4次元多様体のtrisection入門
3. 学会等名 4次元多様体のtrisection勉強会（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 遠藤久顕
2. 発表標題 4次元多様体のtrisection入門
3. 学会等名 N-K00Kセミナー（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 遠藤久顕
2. 発表標題 4次元多様体のtrisection入門
3. 学会等名 研究集会「4次元トポロジー」（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hisaaki Endo
2. 発表標題 Stabilization theorems for Lefschetz fibrations
3. 学会等名 2017 Taiwan Mathematical Society Annual Meeting（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

遠藤久顕(Hisaaki Endo) <a href="https://sites.google.com/view/hisaaki-endo">https://sites.google.com/view/hisaaki-endo</a> Hisaaki Endo <a href="https://sites.google.com/view/hisaaki-endo/english">https://sites.google.com/view/hisaaki-endo/english</a>
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	菊池 和徳  (Kikuchi Kazunori)  (40252572)	大阪大学・大学院理学研究科・講師    (14401)	

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	久野 恵理香  (Kuno Erika)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
フランス	ナント大学		