

令和 4 年 5 月 18 日現在

機関番号：12612

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2021

課題番号：16K05143

研究課題名(和文) 3次元多様体の例外的デー手術による4次元多様体の改変

研究課題名(英文) Surgery on 4-manifolds by exceptional Dehn surgery on 3-manifold

研究代表者

山田 裕一 (YAMADA, Yuichi)

電気通信大学・大学院情報理工学研究科・教授

研究者番号：30303019

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：デー手術によって双曲的な結び目から“例外的に”双曲的でない3次元多様体が生じる現象は「例外的手術」と呼ばれる低次元多様体論の1つの課題である。筆者はこの現象に関連して特殊な4次元多様体を構成・分析することを研究目標としている。可縮は4次元多様体の表示として有名な Mazur link を含む絡み目の族「Akbulut-安井 link」について整数係数の例外的手術の分布を決定した。レンズ空間手術をもつ結び目の稀少な族のディバイド曲線表示を研究した。本研究期間中の論文は3件(うち1件は共著)。研究集会「微分トポロジー」と勉強会「ハンドルセミナー」のほぼ全回に出席し解説講演なども行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

低次元多様体のトポロジー分野において、3次元多様体論と4次元多様体論では様相が大きく異なる。筆者の研究の独創的な点として、その両方に興味を持って研究を進めてきた点が挙げられる。ただし最近の研究動向として両者の関連は急激に強くなっており、2000年代(～2010)に登場し急発展したヒーガード・フレアー理論はその典型的な事例といえる。例外的デー手術から生じる4次元多様体には意外な具体例が多い。本研究の後半では、4次元多様体論の側で対合を持つ4次元コボルディズムへの興味が特に高まっていた。今後も地道な貢献を続けたい。

研究成果の概要(英文)：Phenomenon that a Dehn surgery along a hyperbolic knot in the 3-sphere yields a non-hyperbolic manifold is called "exceptional surgery" and is a subject in the topology of low-dimensional manifolds. We are interested in construction and surgery on 4-manifolds related to exceptional Dehn surgeries. Results: Distributions of integral coefficient exceptional surgeries along Akbulut-Yasui link, including the Mazur link, are decided. Divide presentation of knots in the minor subfamily is considered, and is published in a paper. As research action, I attended almost all workshops "Differential topology" and "handle seminar".

研究分野：位相幾何学、低次元多様体論

キーワード：3次元多様体 4次元多様体 デー手術 枠付き絡み目 Kirby計算 divide knot レンズ空間 特異点論

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

例外的手術は、1980年にR.FintushelとR.Sternによって最初の例 $P(-2,3,7)$ が発見されて以来、多方向に発展して今では低次元多様体論の一分野となっている。2000年代(～2010)に接触多様体論とヒーガード・フレアー・ホモロジー(Heegaard Floer homology)が登場して大きく進展した。後者の1つの応用はレンズ手術の必要条件であった。国内では結び目や低次元トポロジーの研究は盛んであるが、それらを4次元多様体に関連させる研究は申請者独自のものである。2015年頃、対合をもたないデーン手術が発見されたことを受け、その事実を自分で確認する過程でMazur 絡み目からレンズ空間が生じることを発見して驚愕していた。

2. 研究の目的

幾何学で「手術」とは、多様体を一部分の切り貼りで改変することを意味する。結び目に沿うデーン手術(Dehn surgery)による3次元多様体の改変について、双曲的な結び目から双曲的でない3次元多様体が生じるいわば奇妙な現象を「例外的手術」という。その「例外性」に潜む規則性を探りつつ、この現象を特殊な4次元多様体の改変と構成、特にエキゾチック対の構成に結びつけるのが本研究の研究目的である。申請者は4次元多様体を結び目図式で表す framed link の手法に習熟し経験を積んでおり、本研究にこの手法を最大限に活用できる。

3. 研究の方法

申請者の研究分野は低次元(つまり3次元・4次元の)多様体のトポロジーである。数学の研究活動では元来、研究集会への参加による情報交換が最重要である。特に海外の集会に参加することが有益である。本研究では特にトポロジー分野の中での分野の垣根を越える努力が必要となる。コロナ禍の時期からは、在宅での研究、オンライン研究集会のための計算機環境の更新・維持管理も必要となった。申請者の研究では幾何的なアイデアが本質的であり、数式処理や描画のソフトを用いて図を正確に美しく描くことが、成果発表において読者や聴衆の理解の大きな助けとなったはずである。

4. 研究成果

本研究期間全体にわたり、研究分担者の丹下基生氏と安部哲哉氏(大阪市立大から立命館大)が運営する研究集会「微分トポロジー」と、若手中心の勉強会「ハンドルセミナー」のほとんどのに出席し、解説講演なども行なった。これらは下記の各項では述べる。なお、2019年度の報告書で「微分トポロジー-20は中止」と記しましたが、実際には翌年度に延期され、オンラインで無事に開催されました。ここに訂正いたします。

(1) 2021年度(研究期間を1年間延長)

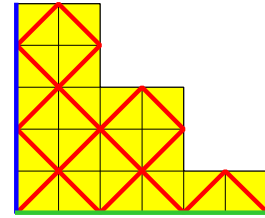
「微分トポロジー-22」のテーマは「デーン手術」であった。筆者は最終講演の機会を与えられ、VII型, VIII型のレンズ空間手術に関連する研究を、特に4次元多様体からの興味に主眼を置いて、自分の過去の成果を軸にしつつ最新の研究動向についても勉強して講演した。

レンズ空間を生じる結び目のディバイド曲線表示のうち最後まで残っていた課題(VIII型の結び目族の具体的表示)について、計算機を利用した実験で、当初推測していた形状は正しくないことが判明した。この成果を研究集会「4次元トポロジー」および国際研究集会「The 17th East Asian Conference of Geometric Topology」で講演した。

(2) 2020年度(5年め:計画では最終年度)

「微分トポロジー-20」は延期されて開催され、「微分トポロジー-21」も開催された。オンライン形式となった。後者はD.Freed and K.Uhlenbeck 著「Instantons and Four-Manifolds」を協力して読破する企画であった。筆者は非専門家の立場で4章「CP2の錐」を担当し講演した。

レンズ空間を生じる結び目のうち散発的と呼ばれる希少種 (IX 型, X 型) の結び目がすべてディバイド曲線表示されることを示した論文が、査読者からの助言に基づく推敲を経て出版に至った。



右図は、レンズ空間手術の IX 型, X 型 knots ($j=-2$ の場合) の divide 表示の基礎になる曲線である。格子から L 字型の領域に沿って切り出した形状をしている。VIII 型について困難が見つかった。

日・中・韓の3国で交代実施している国際研究集会「東アジア Geometry and Topology」(オンライン, 東大) の現地世話人の1人として全日参加した。

科学雑誌「数理科学」のトポロジーの特集記事の執筆依頼を受け、低次元トポロジーの基礎事項を解説して最先端の成果を紹介した。

研究分担者の丹下氏はレンズ空間手術について、アレクサンダー多項式の3項目が非自明な係数を持つときに得られるレンズ空間を全て分類した。4項目が非自明な場合の分類も行った。

山口氏はトーリック多様体 X 上の代数的ループ (多項式で表現できる1次元球面から X への滑らかな写像) について Atiyah-Jones 型の定理が成り立つことを A.Kozłowski 氏 (ワルシャワ大学教授) との共同研究により証明し、論文を投稿した。

(3) 2019 年度 (4 年め)

「微分トポロジー20」はコロナ禍のため翌年度に延期された。「ハンドルセミナー」に毎回参加した。

レンズ空間手術をもつ結び目の divide 表示について、自分の古い結果を再認識し、過去の未完成論文の修正を行なって投稿した。貴重な査読助言に従って推敲も行なった。さらに、4次元多様体論に関連するある絡み目の族について、例外的手術の分布に関する論文の執筆を進めた。前年度に扱った族との比較が興味深い。

2018 年度末の「微分トポロジー19」60分講演 (D.Gabai 氏の「4次元版電球定理」証明の解説) の内容を詳細に話すセミナーを依頼され、1日かけて講演した。聴衆の協力を得て理解が深まった。

大阪大学で11月に開催された研究集会「4次元トポロジー」への参加がとても刺激となった。

研究分担者の山口氏は、複素1次元射影空間からトーリック多様体への正則写像の空間のホモトピー型の研究と関連して、1次元球面からトーリック多様体への代数的ループの空間のホモトピー型の研究を Atiyah-Jones-Segal 予想の観点から研究した。非常に多くの講演をされた。

(4) 2018 年度 (3 年め)

「微分トポロジー19」で、海外で話題となっている D.Gabai 氏の「4次元版電球定理」証明の解説を引き受け、日本語資料を執筆し講演した。「ハンドルセミナー」に毎回参加し、うち1回では境界付4次元多様体の trisection に関する最新論文を紹介した。

可縮だが球体ではない4次元多様体の表示で知られる Mazur 絡み目を含む、ある絡み目の族について、例外的手術の分布に関する論文が学術雑誌 (電子媒体) に掲載された。

前項の考察対象を別の絡み目族にも広げ、論文の執筆も進めた。これらの成果を国際集会「Four Dimensional Topology」と大阪大学「4次元トポロジーセミナー」で講演した。

レンズ空間手術をもつ結び目の divide 表示の課題に関して、自分の古い結果を再認識し、「瀬戸内結び目セミナー」で講演を行った。未完成論文の修正も行った。

研究分担者の山口氏は、トーリック多様体 X 上の正則有理曲線のなす有限次元空間が、対応する CP^1 から X への連続写像のなす無限次元空間のホモトピー群をどの次元まで近似するか「Atiyah-Jones 型予想問題」を考察した。

(5) 2017 年度 (2 年め)

「微分トポロジー17」は、海外の研究者4名の講演を含む研究集会であり、彼らの帰国は2017年度だったため、4月にも非公式に勉強会を開いた。「ハンドルセミナー」に毎回参加した。

丹下氏との共著論文が学術誌に掲載された。同じレンズ空間を生じる結び目の対に関する研究で、過去の共同研究 (トーラス結び目の対) から一歩進んで、一方が双曲的結び目である対に注目した。

可縮だが球体ではない4次元多様体の表示で知られる Mazur 絡み目を含む2成分絡み目の族

について、整数係数手術における例外的手術の分布に関する研究成果を日本数学会（山形大学）で講演した。論文も執筆した。

前項の考察の対象を、ある別の絡み目にも広げた。

研究分担者の山口氏は、B.Farb-J.Wolfson 達によって定義された体 F 上の resultant（一般化された終結式達）の組のなす空間のホモロジー群の決定について考察した。特に、体 F が複素数体の場合には A.Kozłowski 教授（ワルシャワ大学）との共同研究でこの空間のホモトピー型を完全に決定した。

(6) 2016 年度（初年度）

丹下氏、安部氏と研究集会「微分トポロジー'17」を開催した。海外の研究者 4 名の講演を含む研究集会であり、本務先（電気通信大）での開催であった。2000 年代（～2010）に登場して急発展したヒーガードフレア理論の多面的な成果の報告を目的とした。「ハンドルセミナー」ではレンズ空間の不変量の計算法に関する解説講演を 1 回行った。

レンズ空間手術の考察に役立つ changemaker（直訳：両替商）の概念を解説し、トーラス結び目の場合にはディバイド表示と直接的な関係がある、との指摘を「瀬戸内結び目セミナー」で講演した。

日本・韓国・中国で巡回して開催している「The 12th East Asian School of Knots and Related Topics」（東大）の現地世話人を務めた。

本研究期間中には、勤務先の数学教室において 2 年連続で教員が減員し、数学部会長として採用人事などに取り組みました。さらに、コロナ禍で、慣れない在宅での研究や遠隔授業の準備に追われました。研究時間は大幅に減りました。そのような逆境でも、研究分担者を始め多くの研究仲間の活躍と励ましのおかげで上記のような研究活動ができたことを誇りに思います。これを今後の自信につなげたいと考えております。

以上

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Yuichi Yamada	4. 巻 60(2)
2. 論文標題 Divide knot presentation of sporadic knots of Berge's lens space surgery	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Kyungpook Math. J.	6. 最初と最後の頁 255--277
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.5666/KMJ.2020.60.2.255	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Motoo Tange	4. 巻 51(1)
2. 論文標題 The third term in lens surgery polynomials	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Hiroshima Math. J.	6. 最初と最後の頁 101--109
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.32917/h2020050	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Motoo Tange	4. 巻 70
2. 論文標題 Notes on Gompf's infinite order corks	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Michigan Math. J.	6. 最初と最後の頁 3--21
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1307/mmj/1586419413	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kohhei Yamaguchi	4. 巻 2135
2. 論文標題 The topology of the space of rational curves on a topic variety and related problems	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 63-69
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yuichi YAMADA	4. 巻 12
2. 論文標題 Exceptional Dehn surgeries along the Mazur link	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 J. Gokova Geom. Topol. GGT	6. 最初と最後の頁 40--70
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kozłowski A., Yamaguchi K.	4. 巻 249
2. 論文標題 The homotopy type of spaces of rational curves on a toric variety	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 19 ~ 42
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2018.06.006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Motoo Tange and Yuichi Yamada	4. 巻 26 No.11
2. 論文標題 Four-dimensional manifolds constructed by lens space surgeries of distinct types	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 J. of Knot Theory and its Ramifications	6. 最初と最後の頁 1750069-1..15
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0218216517500699	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 A. Kozłowski and K. Yamaguchi	4. 巻 232
2. 論文標題 The homotopy type of spaces of resultants of bounded multiplicity	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Topology and its Appl.	6. 最初と最後の頁 112-139
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2017.10.002	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計14件（うち招待講演 2件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 山田裕一
2. 発表標題 Difficulty on divide knot presentation of Type 8 knots in Berge's lens space surgery
3. 学会等名 研究集会「4次元トポロジー」大阪大学 (Online zoom)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yuichi Yamada
2. 発表標題 Divide knot presentation of Type 8 knots in Berge's lens space surgery
3. 学会等名 The 17th East Asian Conference of Geometric Topology (Korea, Online zoom) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 山田裕一
2. 発表標題 Topics around Type 7 and 8 knots of Berge's lens space surgery
3. 学会等名 研究集会「微分トポロジー 22 ～デーン手術～」立教大 (zoom) (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 山田 裕一
2. 発表標題 Instantons and Four-Manifolds 4章 CP2の巻
3. 学会等名 研究集会「微分トポロジー 21 ～インスタントンゲージ理論スクール～」 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 山田裕一
2. 発表標題 Gabai の4次元版電球定理の証明を概説
3. 学会等名 非公式なセミナー（早稲田大学）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yuichi YAMADA
2. 発表標題 Exceptional Dehn surgeries along certain two-component links related to 4-manifolds
3. 学会等名 "Four Dimensional Topology", Department of Mathematics, Osaka City University (Sumiyoshi-ku, Osaka) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山田 裕一
2. 発表標題 Sporadic knots of lens space surgery
3. 学会等名 研究集会「瀬戸内結び目セミナー」 大島商船高専（山口県大島郡周防大島町）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山田 裕一
2. 発表標題 4次元多様体論に現れる、いくつかの2成分絡み目に沿う例外的デーソ手術の分布
3. 学会等名 「4次元トポロジーセミナー」 大阪大学大学院 理学研究科数学専攻（大阪府豊中市待兼山町）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山田 裕一
2. 発表標題 4-dimensional light bulb theorem by Gabai II
3. 学会等名 研究集会「微分トポロジー 19 ~ 4次元多様体に埋め込まれた曲面とその手術~」立命館大学(東京キャンパス)(東京都千代田区 サピ アタワー8F)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山口 耕平
2. 発表標題 Real analogues of spaces of resultants and its related problems
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型)研究集会「変換群における幾何・代数・組み合わせ論」, 京都大学数理解析研究所(京都市左京区)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山田 裕一
2. 発表標題 Exceptional Dehn surgeries along the Mazur link
3. 学会等名 日本数学会 秋季総合分科会(山形大学)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 山口 耕平
2. 発表標題 Spaces of resultants of bounded multiplicity and its related problems
3. 学会等名 研究集会「空間の代数的・幾何的モデルとその周辺」
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 山口 耕平
2. 発表標題 Spaces of resultants with bounded multiplicity and its real analogues
3. 学会等名 研究集会「実特異点論とその応用」
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山田裕一
2. 発表標題 Change maker とトーラス結び目のレンズ空間手術
3. 学会等名 研究集会「瀬戸内結び目セミナー」
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

山田裕一のページ http://www.yyyamada.e-one.uec.ac.jp/indexj.html 研究集会「微分トポロジー22 デーン手術」 http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/difftop22.html 研究集会「微分トポロジー21 インスタントンゲージ理論スクール」 http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/difftop21.html 研究集会「微分トポロジー19 ~4次元多様体に埋め込まれた曲面とその手術~」 http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/difftop19.html 研究集会「微分トポロジー17」 http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/difftop17.html The 16th East Asian Conference on Geometric Topology https://park.itc.u-tokyo.ac.jp/MSF/topology/conference/EACGT16/
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	山口 耕平 (YAMAGUCHI Kohhei) (00175655)	電気通信大学・大学院情報理工学研究所・名誉教授 (12612)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分 担 者	丹下 基生 (TANGE Motoo) (70452422)	筑波大学・数理物質系・准教授 (12102)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 The 12th East Asia School of Knots and Related Topics	開催年 2017年～2017年
国際研究集会 Differential Topology'17	開催年 2017年～2017年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関