

令和元年6月17日現在

機関番号：13701

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05145

研究課題名(和文) 補空間の曲面の性質を用いたリボン結び目の特徴づけと分類

研究課題名(英文) A characterization of a ribbon knot with property of surfaces in the knot complement

研究代表者

田中 利史 (Tanaka, Toshifumi)

岐阜大学・教育学部・准教授

研究者番号：60396851

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的は、補空間に存在する曲面の位相的な特徴を調べることで、3次元空間内のリボン結び目の特徴づけ及び分類を行うことである。位相幾何学の基本的な手法である曲面同士の交叉に現れる曲線の性質を調べることで、研究成果を上げられると考えた。

本研究では研究対象であるリボン結び目を補空間の曲面を用いて研究を行った。特にリボン結び目の例である対称和について研究を行った。その結果、最小ねじれ数が1の対称和に対して、合成結び目またはサテライト結び目である場合に補空間の曲面の特徴づけを行うことが出来た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

補空間の曲面は、比較的扱いやすい多項式不変量に比べて、結び目のより詳細な情報をもつことが予想される。3次元空間における結び目の補空間の曲面を直接調べることによるスライス結び目の研究は、これまであまり行われていない。そのようなことから、本研究は成果はスライス結び目の幾何学的手法を用いた新たな研究手法に挑戦することにおいて、意義があると思われる。

研究成果の概要(英文)：The purpose of this research is to characterize and classify ribbon knots in three-dimensional space by examining topological properties of curves appearing as the intersection of surfaces in the knot complement. It is expected that results can be obtained by examining the property of the curves that appears at the intersection of surfaces, which is a basic method of topology.

In this research, I studied a ribbon knot which is the main research object by studying surfaces in the knot complement. In particular, I studied a symmetric union, which is an example of a ribbon knot. As a result, I characterized surfaces in the knot complement in the case of composite knots or satellite knots for a symmetric union with minimum twist number one.

研究分野：トポロジー

キーワード：リボン結び目 曲面

1. 研究開始当初の背景

結び目コボルディズムの研究は1960年頃にFoxとMilnorの研究により注目を集めた。結び目コボルディズムとは結び目の集合に与えられる同値関係のことであり、その同値関係の同値類の集合を考えると、それは群の構造を許容する。この群は結び目コボルディズム群とよばれ、その単位元にあたるものがスライス結び目である。このスライス結び目は4次元球体に埋め込まれた円板の境界になり得る結び目であると定義される。

これまでのスライス結び目の特徴づけに関する研究は主に、代数的不変量を用いて行われてきた。例えば、そのような研究は1966年のFoxとMilnorの論文においても見ることができる。その論文では、任意のスライス結び目のAlexander多項式 Δ は、ある多項式 $F(t)$ を用いて $\Delta = F(t)F(1/t)$ と表せるという定理が示されている。

その他のこのような研究として以下の5つの結果がある。

- 1) 上の定理はKirkとLivingstonによりねじれAlexander多項式を用いた形で一般化されている。
- 2) KauffmanはConway多項式とArf不変量との関係を導き出すことでConway多項式の2次の係数の偶奇性が結び目コボルディズム不変量であり、とくにスライス結び目に対しては偶数の値をとることを示している。
- 3) 私はKauffman多項式の変数の一つの最大次数 d と極大Bennequin数との関連を調べ、特に交代結び目に対してはKauffman多項式のその次数 d が、結び目がスライス結び目であるかの判定に用いることができることを示した。

3次元球面内のリボン型特異点集合のみをもつ特異円板の境界である結び目はリボン結び目とよばれる。リボン結び目はスライス結び目であることが知られている。

- 4) Lammはリボン結び目として知られている対称和の特徴づけをAlexander多項式を用いた行った。
- 5) Eisermannはリボン結び目の結び目行列式の特徴づけをJones多項式を用いて行った。
- 6) RasmussenはKhovanov理論を用いて整数値不変量を定義し、結び目がスライス結び目であるとき0となることを示した。
- 7) 私はJones多項式の公式を用いて、リボン結び目の例である結び目の対称和の分類を行った。その結果、単純な対称和の場合の特徴づけを行うことができた。

リボン結び目以外のスライス結び目の例は現在まで知られていない。これに関する次のFoxによる予想を解決することは、重要な問題の1つである。

予想. すべてのスライス結び目はリボン結び目である。
これはスライス-リボン予想とよばれているが、2橋結び目の族やプレッツェル結び目のある族については正しいことが示されている。この予想を解決するためにはリボン結び目の性質を調べ特徴づけることが重要である。

2. 研究の目的

本研究の目的はリボン結び目の特徴づけ及び分類を行うことである。リボン結び目とは、結び目コボルディズムの分野において重要な研究対象である、スライス結び目の唯一の例である。

低次元多様体の位相的研究において、多様体の内部の曲面の位置や幾何学的性質を用いて、多様体の位相的性質を特徴づけることは、基本的かつ重要な問題である。1960年代から、結び目理論の研究者において注目を集めている結び目コボルディズムの研究では、スライス結び目の位相的分類に関するいくつかの重要な問題がある。その中で、次の課題に取り組むことがこの研究の目的である。

研究課題 結び目の補空間の曲面の幾何学的性質を調べ、リボン結び目の特徴づけ及び分類を行う。

3. 研究の方法

結び目の補空間の曲面の性質を調べ、リボン結び目の特徴づけ及び分類を行った。Lammの研究において「リボン結び目は結び目の対称和と同値である」ことが予想されている。これを対称和予想と呼ぶ。この予想は一般には未解決であり、この予想が成り立つかを考察した。さらに、対称和及びリボン結び目の特徴づけ及び分類を行った。

Menascoの手法を考察し、結び目の対称和の補空間の曲面の性質を調べることで、リボン結び目の分類問題に取り組んだ。1984年の論文においてMenascoは交代絡み目の研究において、その外部の曲面を調べるための有効な手法を導入した。この手法は、これまで結び目理論におけるいくつかの重要な問題の解決に用いられている。この手法の特徴は結び目の図式から、その結び目の外部の曲面の性質を考察できる点である。したがって曲面を直接扱うため、他の研究手法と比べ、結び目のより詳細な情報を導くことが予想される。そのため、この手法をリボン結び目の研究に用いることは、大きな成果が見込まれ、また意義があると考えられる。

4. 研究成果

平成 28 年度では、研究課題であるリボン結び目の補空間の曲面を用いたリボン結び目の研究において、リボン結び目の例である結び目の対称和について考察した。対称和は鏡映対称な位置にある 2 つの結び目を、対称平面上にあるいくつかの 2 タングルでつなぐことで得られる結び目である。対称和は結び目の図式の形状を用いて定義されるため、上記の Menasco の手法のように曲面を用いて交代結び目と同様に特徴づけられると期待できる。その結果として、対称和が合成結び目である場合の補空間の分解球面の位置を調べることで、ある条件の下で対称和の特徴づけを行うことができた。具体的には、合成対称和を構成するタングルが 1 個の場合に、それが 2 つの対称和の連結和であるかまたは、ある結び目とその鏡像からなる対称和の成分を含むことを示した。その帰結として、合成対称和で最小ねじれ数が 2 である対称和結び目の例を初めて示すことができた。関連した研究として、結び目の結び目解消数と領域結び目解消数に関する研究を行った。結果としてゲーリッツ不変量から定まる数量を用いて、それぞれの不変量に関する評価式を得ることができた。対称和の例である金信結び目の結び目解消数と領域結び目解消数はそれぞれ 2、3 以下であることが分かるが、この評価式を用いることにより、それらが 2、3 に一致するための十分条件を与えることができた。

平成 29 年度では、前年度に引き続き研究課題であるリボン結び目の補空間の曲面を用いた結び目の対称和についての研究を行った。私は対称和の対称性と曲面との関係を考察することで研究をさらに進めた。その結果として、合成結び目である場合の補空間の分解球面を調べることにより、対称和の特徴づけを行うことができた。具体的には、最小ねじれ数が 1 である対称和に対して、それが素な結び目となるための十分条件を示した。また最小ねじれ数が 1 である 2 つの対称和結び目の連結和が最小ねじれ数 2 を持つための必要十分条件を与えた。さらにその帰結として、最小ねじれ数が 2 である結び目が無限個存在することを示した。これまでの研究成果をまとめた論文を査読付き雑誌に投稿した。関連した研究として、対称和の p 彩色数に関する研究を行った。結び目の符号数の性質を用いることにより、 p 彩色数が p である対称和が無限個存在することを示した。

平成 30 年度では、前年度に引き続いて対称和の研究をさらに進めた。その結果として、最小ねじれ数が 1 である対称和に対して、それがサテライト結び目の場合に、その補空間に互いに平行でない圧縮不能トーラスが少なくとも 2 つ存在することが分かった。またその帰結として、パターン絡み目が双曲的でないことが分かった。関連した研究として、2 成分の絡み目である対称和の研究を行った。対称和絡み目に対して、最小ねじれ数を定義し、各成分の最小ねじれ数との間の不等式を与えた。さらに、「その不等式の等号が常に成り立つか」という問題を考え、その問題に対していくつかの反例を与えた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 (計 4 件)

- ① [Tanaka Toshifumi](#), On the Jones polynomial of symmetric unions with two components、岐阜大学教育学部研究報告 (自然科学)、査読無、第 43 巻、2019 年、13-19
- ② Mizuguchi Shou、[Tanaka Toshifumi](#), On the number of p -colorings of knots、岐阜大学教育学部研究報告 (自然科学)、査読無、第 42 巻、2018 年、9-13
- ③ Furuta Kana and [Tanaka Toshifumi](#), The region index and the Rasmussen invariant of a knot、岐阜大学教育学部研究報告 (自然科学)、査読無、第 41 巻、2017 年、27-30
- ④ [Tanaka Toshifumi](#), The region index and the unknotting number of a knot、Topology Appl.、査読有、219、2017 年、141-151

〔学会発表〕 (計 4 件)

- ① [田中利史](#)、結び目の対称和とその性質について、岐阜大学トポロジーセミナー (岐阜大学)、2019 年
- ② [田中利史](#)、On composite symmetric unions、4 次元トポロジー (大阪市立大学)、2017 年
- ③ [田中利史](#)、On the region index and the unknotting number of a knot、Friday Seminar on Knot Theory (大阪市立大学)、2017 年
- ④ [田中利史](#)、On composite knots with symmetric union presentations、拡大 KOOK セミナー (大阪電気通信大学)、2016 年

〔図書〕 (計 0 件)

〔産業財産権〕

○出願状況 (計 0 件)

名称：

発明者：

権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<https://nrid.nii.ac.jp/ja/nrid/1000060396851/>

6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号（8桁）：

(2) 研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。