

令和 2 年 6 月 18 日現在

機関番号：14501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05147

研究課題名(和文) 1次元と2次元の結び目の類似性と相違性に関する射影図的研究

研究課題名(英文) Diagrammatic research on similarity and difference between 1- and 2-dimensional knots

研究代表者

佐藤 進 (SATO, SHIN)

神戸大学・理学研究科・教授

研究者番号：90345009

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：(1) トーラス結び目および2橋結び目の $n$ パレット数を一般の $n$ で完全に決定した。(2) リボン曲面タングルを用いて曲面結び目のダブルを導入し、曲面結び目からリボン結び目の安定同値類への自然な写像が存在することを示した。(3) 仮想結び目のねじれ多項式がシェル変形で特徴付けられることを示し、さらにその結果を2成分仮想絡み目へ拡張した。(4) 溶接結び目に対するパス変形は結び目解消操作であることを示した。(5) 曲面結び目の射影図の2重点集合を三叉コードをもつガウス図式で表示し、そこから2階層集合のガウス図式を復元することができることを示した。特に2次元結び目の2重点集合の性質を明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の課題は1次元および2次元の結び目の性質を、射影図という観点から明らかにすることであった。(1) これまで具体的な $n$ の値でしか決定されていなかった $n$ パレット数を大きなクラスで一般に決定できた。(2) カンドルや結び目群といった曲面結び目の研究がリボン曲面結び目に限定することができるようになった。(3) 結び目の不変量と局所変形という、幾何と代数をつなぐ観点から、ねじれ多項式に対応する局所変形を見つけることができた意義は大きい。(4) 結び目のアーフ不変量は溶接結び目に拡張できないことを意味している。(5) 2次元結び目の2重点集合の性質により、3重点を用いたリスト作成に役立てることができる。

研究成果の概要(英文)：(1) We determine the palette numbers of  $n$ -colorable torus knots and 2-bridge knots. (2) We introduce the double of a surface-knot via ribbon surface-tangles, and construct a natural map from the set of surface-knots to that of the stable classes of ribbon surface-knots. (3) We characterize the writhe polynomial of a virtual knot by shell moves, and extend it to the case of 2-component virtual links. (4) We prove that the pass move is an unknotting operation for welded knots. (4) We introduce a presentation of the double point set of a diagram of a surface-knot by using a Gauss diagram with trivalent chords, and prove that it recovers the Gauss diagram of the corresponding double decker set of the surface-knot diagram. In particular, we give several properties of the double point set in the case of a 2-dimensional knot.

研究分野：結び目理論

キーワード：曲面結び目 射影図 仮想結び目 溶接結び目 不変量

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

3次元ユークリッド空間の中の1次元の結び目に対し、4次元ユークリッド空間の中の閉曲面を曲面結び目という。1次元の結び目の研究はこれまでに活発に行われているが、曲面結び目に対する研究はまだ十分であるとはいけないのが現状である。特に交点数による1次元の結び目のリスト作成のような、曲面結び目のリスト作成はできていない。また、トーラスの曲面結び目は1次元結び目の拡張である仮想結び目、溶接結び目により表現されるが、その基本的な不変量の性質についてもまだ研究が進んでいなかった。

### 2. 研究の目的

(1) 1次元結び目の  $n$  彩色数は古典的な不変量のひとつであり、 $n$  パレット数は関連する新しい不変量である。トーラス結び目および2橋結び目のクラスに対して  $n$  パレット数を決定する。

(2) 1次元結び目理論におけるタングルの利用は大きな道具のひとつである。これを曲面結び目理論に導入して、曲面結び目の曲面タングルによる分解の性質を明らかにする。

(3) 不変量と局所変形の研究は、1次元結び目の代数と幾何をつなぐ重要なものである。この考え方を仮想結び目に導入し、特にねじれ多項式に対応する局所変形を調べる。さらに2成分仮想結び目に対してどのような振る舞いをするか調べる。

(4) (3) と同様な研究を溶接結び目に対して行う。特に交差交換、デルタ変形、シャープ変形、パス変形などの局所変形による、溶接結び目の同値類がどのようなようになるか調べる。

(5) 1次元結び目理論において、結び目のリストは研究のさまざまな場面で用いられ、それは結び目の交点数に応じて作成される。これに対して曲面結び目の研究が発展しない原因のひとつに、有効な曲面結び目のリストが存在しないことが挙げられる。その作成のためには曲面結び目の射影図の性質、特に2重点集合の性質を詳しく調べる必要がある。

### 3. 研究の方法

(1) これまでの研究により1次元結び目の  $n$  パレット数は  $2 + \log_2 n$  を用いて下から評価されることが知られていた。そこでこの下限が最善であると予想し、トーラス結び目と2橋結び目の射影図を  $n$  彩色されたライデマイスター変形を用いて  $n$  パレット数を実現する形に変形できないかを考察する。

(2) 4次元上半空間に適切に埋め込まれたコンパクトな曲面で、その境界が3次元空間内で自明な結び目を表すものを曲面タングルという。また曲面タングルに対し、その境界を円板で塞ぐことにより得られる曲面結び目を閉包という。さらに曲面タングルとその鏡像を境界に沿って貼り合わせたものをダブルという。曲面結び目のダブルがどのような性質をもつか調べる。

(3) 仮想結び目の射影図はガウス図式を用いて表現され、そのねじれ多項式もガウス図式から計算される。そこでガウス図式を利用してねじれ多項式を不変にする局所変形を見つける。さらにその局所変形によってガウス図式がどこまで標準形に変形できるかを調べる。またその局所変形を2成分仮想結び目のガウス図式に適用し、その標準形を調べる。

(4) 1次元結び目理論における交差交換は結び目解消操作であり、これと同じ結果は仮想結び目では成り立たないことが知られている。そこでまず溶接結び目に対して交差交換が結び目解消操作であるかどうかを調べる。次に Suzuki の手法により交差交換をメリディアンとバンドとの和で表現し、溶接結び目の範囲でどのような変形が実現できるかを調べることで、さまざまな局所変形が結び目解消操作であるかどうかを明らかにする。

(5) 三又コードをもつガウス図式を導入することにより曲面結び目の射影図の2重点集合を表現し、そのリストを作成する。さらに2階層集合との関係を明らかにし、特に球面の埋め込みである2次元結び目の2重点集合がもつ性質について調べる。

### 4. 研究成果

(1)  $n$  彩色可能な結び目  $K$  に対し、 $K$  の日自明に  $n$  彩色された射影図  $D$  に現れる色が  $c(D)$  色あるとし、すべての  $n$  彩色にわたる  $c(D)$  の値の最小値を  $C_n(K)$  とかく。ただし  $n$  が合成数の場合は効果的な  $n$  彩色のみを考える。この  $C_n(K)$  を  $K$  の  $n$  パレット数という。まず  $(2, n)$  トーラス結び目の場合に射影図  $D$  を変形することにより  $C_n(D) = \lceil \log_2 n \rceil + 2$  となるものの存在を示した。これを用いると任意のトーラス結び目  $K$  に対して  $C_n(K) = \lceil \log_2 n \rceil + 2$  が成り立つことがわかつ

た。また 2 橋結び目の場合、2 橋表示射影図を利用することで色の種類を減らすことができ、トールス結び目と同様の結果を得ることができた。

( 2 ) 4 次元上半空間内の曲面タングルで、高さに関して極小点をもたないものをリボン曲面タングルとよぶ。任意の曲面結び目  $K$  に対して、閉包  $Cl(T)$  が  $K$  となるようなリボン曲面タングル  $T$  が常に存在する。一方で境界の 3 次元空間に関して  $T$  を折り返して得られる  $T^*$  と  $T$  との和を  $D(T)$  とかく。ここで  $D(T)$  はリボン曲面結び目となる。このとき曲面結び目の集合からリボン曲面結び目の集合への写像  $f$  を  $f(K)=D(T)$  で定めると、これは自明な 1 ハンドルの追加と除去による安定同値関係のもとで well-defined であることが示せる。しかも  $K$  の結び目群  $G(K)$  と結び目カンドル  $Q(K)$  はそれぞれ  $f(K)$  のそれら  $G(f(K))$  と  $Q(f(K))$  と同型であることがわかった。

( 3 ) 仮想結び目の奇ねじれ数  $J(K)$  はクシイ変形とよばれる局所変形と対応する。すなわちふたつの仮想結び目  $K, K'$  について  $J(K)=J(K')$  であるための必要十分条件は  $K$  と  $K'$  がクシイ変形の有限列でうつりあうことが知られている。一方で、ねじれ多項式  $W_K(t)$  は  $J(K)$  の拡張であるが、この不変量がどのような局所変形と対応するかは知られていなかった。この研究で、シェル変形とよばれる局所変形を定義し、ふたつの仮想結び目  $K, K'$  について  $W_K(t)=W_{K'}(t)$  であるための必要十分条件は  $K$  と  $K'$  がクシイへんげいの有限列でうつりあうことを証明した。さらに 2 成分の仮想絡み目  $L, L'$  について  $L$  と  $L'$  がクシイ変形でうつりあうための必要十分条件を記述するために必要な不変量を構成し、その性質を明らかにした。

( 4 ) 交差交換は仮想結び目に対しては結び目解消操作ではないが、この研究で溶接結び目に対しては結び目解消操作になることを示した。これを用いると、デルタ変形とシャープ変形、パス変形も結び目解消操作であることがわかった。1 次元結び目理論では、パス変形に対応する不変量としてアーフ不変量があるが、今回の結果は 1 次元結び目の拡張である溶接結び目に対してはアーフ不変量は定義できないことを意味している。

( 5 ) 曲面結び目の射影図における 2 重点集合と、その逆像であるもとの閉曲面上での 2 階層集合の関係をガウス図式を通して明らかにした。これを用いると、特に 2 次元球面の埋め込みである 2 次元結び目の射影図がブランチ点を持たない場合、任意の 2 重点円周上にある上 3 重点、中 3 重点、下 3 重点の符号の和はいずれも 0 であることがわかる。またトールスの埋め込みではこの性質は成り立たないことも示せた。2 階層集合の平面性をガウス図式に反映させることで、この他にも 2 重点集合がみだすべき必要十分条件を与えることができた。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 9件／うち国際共著 2件／うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 T. Nakamura, Y. Nakanishi, S. Satoh, and A. Yasuhara	4. 巻 247
2. 論文標題 The pass move is an unknotting operation for welded knots	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Topology Appl.	6. 最初と最後の頁 9, 19
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 S. Satoh	4. 巻 48
2. 論文標題 Crossing changes, delta moves and sharp moves on welded knots	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Rocky Mountain J. Math.	6. 最初と最後の頁 967, 979
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 T. Nakamura, Y. Nakanishi, and S. Satoh	4. 巻 27
2. 論文標題 Finiteness of the set of virtual knots with a given state number	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 J. Knot Theory Ramifications	6. 最初と最後の頁 1850049, 16 pp
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 T. Hayashi, T. Nakamura, Y. Nakanishi, and S. Satoh	4. 巻 26
2. 論文標題 The palette numbers of torus knots	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 J. Knot Theory Ramifications	6. 最初と最後の頁 1750060(9pp)
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 T. Nakamura, Y. Nakanishi, M. Saito, and S. Satoh	4. 巻 26
2. 論文標題 The palette numbers of 2-bridge knots	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 J. Knot Theory Ramifications	6. 最初と最後の頁 1750047(6pp)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 T. Nakamura, Y. Nakanishi, M. Saito, and S. Satoh	4. 巻 222
2. 論文標題 The 6- and 8-palette numbers of links	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Topology App.	6. 最初と最後の頁 200-216
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 T. Nakamura, Y. Nakanishi, and S. Satoh	4. 巻 25
2. 論文標題 11-colored knot diagram with five colors	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 J. Knot Theory Ramifications	6. 最初と最後の頁 1650017, 22pp
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Y. Funahashi, Y. Nakanishi, and S. Satoh	4. 巻 25
2. 論文標題 A note on the OU sequences of a 2-bridge knot	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 J. Knot Theory Ramifications	6. 最初と最後の頁 1671001, 4pp
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 S. Satoh	4. 巻 16
2. 論文標題 The length of a 3-cocycle of the 5-dihedral quandle	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Algebra. Geom. Topol.	6. 最初と最後の頁 3325-3359
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計12件 (うち招待講演 11件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 佐藤進
2. 発表標題 Double point circles of regular 2-knot diagrams
3. 学会等名 研究会「拡大K00Kセミナー2018」(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 S. Satoh
2. 発表標題 The n-cable of a ribbon 2-knot
3. 学会等名 Four Dimensional Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 佐藤進
2. 発表標題 A property of regular 2-knot diagrams
3. 学会等名 研究会「2018年度琉球結び目セミナー」(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 佐藤進
2. 発表標題 A set of local moves generating the writhe polynomial
3. 学会等名 拡大KOOKセミナー2017 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 佐藤進
2. 発表標題 リボン曲面タングルと曲面絡み目のダブル
3. 学会等名 2017年度秋季総合分科会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 佐藤進
2. 発表標題 2次元結び目の多重化について
3. 学会等名 2017年度琉球結び目セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 佐藤進
2. 発表標題 曲面結び目のねじれない射影図
3. 学会等名 拡大KOOKセミナー (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Shin Satoh
2. 発表標題 A construction of stable classes of ribbon surface-knots from non-ribbon surface-knots
3. 学会等名 KOOK-TAPU Workshop of Knots in Tsushima Island (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 佐藤進
2. 発表標題 Fundamental deformations of unknotted surface-knots
3. 学会等名 4次元トポロジー (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Shin Satoh
2. 発表標題 The ribbon stable class of a surface-link
3. 学会等名 Friday Seminar on Knot Theory (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 佐藤進
2. 発表標題 単純2次元結び目図式のOUグラフについて
3. 学会等名 2016年度琉球結び目セミナー (招待講演)
4. 発表年 2016年



1. 発表者名 Shin Satoh
2. 発表標題 On the double of a surface-link
3. 学会等名 The 12th East Asian School of Knots and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----