

令和 2 年 6 月 11 日現在

機関番号：15401
 研究種目：基盤研究(C) (一般)
 研究期間：2016～2019
 課題番号：16K05149
 研究課題名(和文) 3次元多様体の基本群が許容する不変順序に関する研究

 研究課題名(英文) Orderings in 3-manifold groups

 研究代表者
 寺垣内 政一 (Teragaito, Masakazu)

 広島大学・教育学研究科・教授

 研究者番号：80236984
 交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：3次元多様体の基本群，特に結び目の補空間の基本群である結び目群に重点をおいて，群演算に関して不変な順序構造や共役ねじれ元，正規生成元の存在について研究を行った．最も重要な研究課題は，研究代表者が研究協力者と提案した次の予想である．3次元多様体の基本群においては，両側不変順序を許容しないことと，共役ねじれ元の存在は同値であると予想する．この予想の完全な解決には至っていないが，代表的な3次元多様体の族に対して，部分的に解決することができた．派生的に，フィボナッチ群やその一般化に対して，共役ねじれ元の構成に成功した．また，結び目群に対して，スロープの正規閉包の相互関係の研究を行った．

研究成果の学術的意義や社会的意義
 低次元トポロジーにおいて，最も注目されているのは3次元多様体といっても過言ではない．本研究では，3次元多様体の基本群に注目し，群論的な問題に対してトポロジーの成果を用いて取り組んだ．ヘガード・フロア理論からの要請もあって，基本群が許容する不変順序の研究は喫緊の課題であり，引き続き国内外における研究継続が望まれる．

研究成果の概要(英文)：We proposed a conjecture which claims that a 3-manifold group is not bi-orderable if and only if it admits a generalized torsion element. Although this is still open, we solved it for various families of 3-manifolds such as Seifert fibered manifolds. As a byproduct, we found a way to construct generalized torsion elements for Fibonacci groups and their generalizations. Also, we studied the normal closures of slope elements in knot groups and their inclusion relation.

研究分野：トポロジー

キーワード：不変順序 3次元多様体 共役ねじれ元 正規生成元 正規閉包

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

2011年、ゴードンたちによってL空間予想が提案された。L空間とは、21世紀に登場したヘガード・フロアー・ホモロジー理論において、最も基本的な3次元多様体である。その定義はヘガード・フロアー・ホモロジーの言葉で述べられており、オズヴァスとザボーによってL空間が導入された当初から、ヘガード・フロアー・ホモロジーに言及しないL空間の位相幾何学的な特徴づけが懸案問題であった。L空間予想とは、既約な有理ホモロジー球面がL空間であるための必要十分条件として、ある種の葉層構造を許容しないこと、あるいはその基本群が左からの群演算に対して不変な全順序(左不変順序)を許容しないことを主張する。研究開始当初の時点では、ザイフェルト多様体やグラフ多様体といった3次元多様体の族に対して、L空間予想が肯定的に確認されていた。代表的な結び目・絡み目の族である交代結び目・絡み目に対しては、二重分岐被覆空間がL空間になることが知られており、その基本群が左不変順序を許容しないことについて、初等的な証明が発見されていた。

また、L空間を二重分岐被覆空間にもつ結び目・絡み目として、上述の交代結び目・絡み目を拡張した擬交代結び目・絡み目という族が導入され、どの結び目・絡み目が擬交代かという問題、多項式不変量等を用いた擬交代性への障害の研究などが蓄積されつつあった。

群演算に対して不変な全順序を許容する順序群の研究の歴史は長いが、トポロジーへの応用に関心が集まってきたのは近年のことである。そこへ上述のL空間予想が登場し、トポロジーで扱われる群、例えば結び目の補空間の基本群である結び目群や3次元多様体の基本群などにおける不変順序の研究が出現し始めていた。ファイバー型結び目の結び目群が両側不変順序を許容するための十分条件や、双曲結び目の結び目群の中で、ねじれ元の拡張概念である共役ねじれ元をもつものが発見されるといった成果が得られていた。共役ねじれ元存在は、その群に対する両側不変順序存在のための障害になる。古くは、両側不変順序が存在しないことと、共役ねじれ元存在が同値ではないかと予想されていたが、1970年代に群論的に反例が構成されていた。

このような状況の中で、3次元多様体の代表的な構成法である結び目のデーモン手術、結び目の分岐被覆空間を経由して、いつL空間が生じるかという問題、3次元多様体の基本群や特に結び目群が許容する左不変順序あるいは両側不変順序の探究への動機づけをえた。特に、群が両側不変順序を許容しないにもかかわらず、共役ねじれ元をもたないという例は、極めて人工的な群であり、3次元多様体の基本群ではないと思われた。

2. 研究の目的

申請時点では、次の3つの問題に取り組むこととした。

- (1) 結び目群を主として、3次元多様体の基本群がいつ両側不変順序を許容するか。そしてその障害である共役ねじれ元存在について、2橋結び目や2元生成結び目群について考察する。
- (2) 結び目のデーモン手術で得られる多様体及び巡回分岐被覆空間がいつL空間になるか。被覆度数が低い場合に対して、2橋結び目や交代結び目に対して考察する。
- (3) 擬交代絡み目の研究。Q多項式やカウフマン多項式以外の多項式不変量によって判定できるかどうかを考察する。また、擬交代絡み目は行列式の値ごとに有限個しかないと予想されているが、行列式が小さい値の場合を考察する。

3. 研究の方法

研究代表者が主として研究の推進を行った。また、共同研究を行った課題については、研究協力者である日本大学の茂手木公彦氏、京都大学の伊藤哲也氏と日常的に電子メールでやりとりを行い、議論を積み重ね、年に何度かは3人が実際に会って研究の打ち合わせを行った。

4. 研究成果

(1) 背景で述べたように、順序群の歴史の中で、両側不変順序が存在しないことと、共役ねじれ元存在は同値であると予想されていたのだが、1970年代に人工的な反例が構成された。私は、3次元多様体の基本群のようにある意味、素性の良い群では、そのような反例は存在しないと予想し、茂手木公彦氏との共同研究において、ザイフェルト多様体や可解多様体に対して、この予想を肯定的に解決した。さらに、8の字結び目の巡回分岐被覆空間の全てについても、基本群とフィボナッチ群との関係を利用して予想を解決した。レープレス葉層構造を許容しないことで知られる双曲3次元多様体の無限族に対しても解決することができ、これらの結果は共著論文として国際学術雑誌から出版した。この成果は国外でも注目され、2017年1月30日から2月3日にイギリスのケンブリッジ大学アイザック・ニュートン数理学研究所で開催された3次元多様体のワークショップに招待され、研究代表者が1時間の講演を行った。また、ワークショップに出席していた3次元多様体の基本群研究の世界的権威であるドイツのステファン・フリードル博士と議論をもつことができ、(6)に述べる共役ねじれ元の幾何的な構成という研究成果の一部に繋がった。L空間予想を提唱し、低次元トポロジーにおいて長らく世界を牽引しているキャメロン・ゴードン博士からも、今後の研究の方向性について示唆をもらうなど、有意義な機会となった。

(2) コンウェイによって導入されたフィボナッチ群の拡張は、これまでにいくつか知られている。(1)で述べたようにフィボナッチ群に対して共役ねじれ元を構成したが、その手法を拡張して、マクラクランとリードによる一般的フィボナッチ群についても共役ねじれ元を構成する

ことができた。さらに、分数的フィボナッチ群の一部の族に対しても共役ねじれ元の存在を示すことに成功した。2017年11月に韓国の釜山で開催された「トポロジーとその応用に関する第2回環太平洋国際会議」で研究代表者が招待講演を行った際、出席していたロシアのヴェスニン博士と議論をもつことができた。同博士は分数的フィボナッチ群を最初に導入した研究者であり、私の研究内容に興味をもたれた。残念ながら、分数的フィボナッチ群における共役ねじれ元の存在について、完全な解決に至っていないため、論文としてまとめる段階にはないのだが、継続して研究していきたい。

(3) 結び目群において、スロープの定める正規閉包の間の関係について分析を行い、それらがいつ一致するのかというマグナス問題について完全な解決を与えることに成功した。また、正規閉包の間の包含関係や共通部分に関する成果もえた。双曲結び目については、任意に選ばれた無限個のスロープの正規閉包の共通部分は単位元のみからなることを証明した。デー手術の文脈で述べれば、双曲結び目の結び目群に含まれる非自明な元は、高々有限個のデー手術によってしか自明化されないことを意味している。これらの成果は、茂手木公彦氏、伊藤哲也氏、市原一裕氏との共著論文として2本の論文にまとめ、両方とも国際学術雑誌から出版されている。また、2019年6月16日から21日にメキシコ・オアハカで開催された「力学系とトポロジーにおける順序群と剛体性に関する国際会議」において、招待講演を行った。この会議では、茂手木公彦氏、伊藤哲也氏と研究代表者がそれぞれ30分ずつの連続講演を行った。フランスのポアロ博士やカナダのポイヤー博士といった世界的権威が出席しており、今後の方向性について有意義な助言を頂いた。結び目群におけるスロープの正規閉包に関する先行研究は少なく、多くの課題が残されている。引き続き、研究協力者と連携しながら、研究を継続したい。

(4) 結び目群は、1つの元の正規閉包として生成することができる。そのような元を正規生成元とよぶが、代表的な正規生成元はメリディアンであり、メリディアンと共役でない正規生成元の存在が課題とされてきた。先行研究において、この問題が解決された結び目は、トーラス結び目、2橋結び目、結び目解消数1双曲結び目、ケーブル結び目であった。本研究では、新しい結び目の族として、プレッツェル結び目のある無限族に対して、メリディアンと共役でない正規生成元を構成することに成功した。この研究では、自明な群に対する生成元が2個の群表示を活用する点において、萌芽的なアイデアの導入を行った。この成果は研究代表者が日本数学会で発表し、国際学術雑誌に掲載された。

(5) 共役ねじれ元をもたない群の有限個の自由積が共役ねじれ元をもつかどうかは順序群の分野において、長年の懸案問題であった。本研究では、安定交換子長という幾何的群論で重要な道具を用いて、共役ねじれ元の位数を定義し、この問題を解決した。すなわち、共役ねじれ元をもたない群の自由積には、共役ねじれ元が存在しない。より厳密に言えば、ねじれ元をもたない群の有限個の自由積が共役ねじれ元をもつときには、その共役ねじれ元はいずれかの因子の中の共役ねじれ元に共役であることを証明した。この事実は、3次元多様体の連結和分解と自然に対応する。一方で、3次元多様体のトーラス分解に対して、類似の結果が成立しないことを示した。すなわち、トーラス分解の各因子である3次元多様体の基本群には共役ねじれ元が存在しないにもかかわらず、全体の3次元多様体の基本群には共役ねじれ元が存在する例を無限個構成した。この成果は、茂手木公彦氏、伊藤哲也氏との共著論文として国際学術雑誌から出版された。

(6) ねじれ元の一般化である共役ねじれ元の幾何的な意味は依然としてわかっていない。結び目に対してデー手術をおこなった場合、自明な手術と0手術を除いて、生じる3次元多様体の基本群は両側不変順序を許容しないため、共役ねじれ元の存在が期待できる。これは(1)で述べた茂手木公彦氏と研究代表者による予想の特殊な場合に当たる。デー手術で得られる3次元多様体の基本群はもとの結び目群のスロープの正規閉包による商群になる。もとの結び目群が共役ねじれ元を含み、それが手術で生き残る場合と、もとの結び目群には共役ねじれ元はないが、手術の結果、共役ねじれ元が発生する場合の2つの現象が考えられる。前者の現象は(3)の研究課題と関連する。ここでは、後者の現象について、結び目を境界にもつ特異点付きの円盤を利用する成果を得た。そのような円盤と結び目の交点と同符号のとき、円盤の境界が定めるスロープよりも大きいスロープについて、共役ねじれ元の存在を確認した。これは、共役ねじれ元の幾何的な意味についての1つの解釈を与えている。一方で、種数1の2橋結び目について、結び目群の表示にのみ基づいて、上述の特異点付き円盤による評価よりも良い評価を与えることに成功した。すなわち、幾何的な意味が不明ではあるが、ある範囲のスロープに対して、デー手術の結果、生じる3次元多様体の基本群に共役ねじれ元を見出すことができる。この結果については、2019年11月に中国・成都で開催された「トポロジーとその応用に関する第3回環太平洋国際会議」で研究代表者が招待講演を行った。この内容は論文にまとめ、同国際会議のプロシーディングに投稿し、現在、査読の過程にある。

(7) デー手術によってレンズ空間を生じる結び目は、バーギが1980年代に導入した両側原始的結び目であると予想されている。レンズ空間はL空間の典型例であるが、デー手術によってL空間を生じることのできるいわゆるL空間結び目について、そのアレキサンダー多項式には厳しい制約があることが知られている。特に、係数は1と-1が交互に出現しなければならない。したがって、次の課題はアレキサンダー多項式における次数の出現の仕方である。上越教育大学の斎藤敏夫氏との共同研究では、両側原始的結び目の双対結び目を利用して、アレキサンダー多項式には1次の項があることを初等的に証明した。この結果はL空間結び目に対して知られているものであるが、我々の議論は極めて初等的であることが注目に値する。2次の項につい

ては解決できていないが、予想を得た。3 次以上の項については双曲的な両側原始的結び目のアレキサンダー多項式には出現可能であることを証明した。また、関連する話題として、形式的半群という概念があり、双曲的な L 空間結び目に対して、形式的半群は実際には半群にならないと予想するに至った。これは両側原始的結び目に対する計算機実験から示唆されたことであり、引き続き研究を継続したい。この成果については、2020 年 2 月に沖縄科学技術大学院大学で開催されたミニ・ワークショップに招待され、研究代表者が 1 時間の講演を行った。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Masakazu Teragaito	4. 巻 98
2. 論文標題 Weight elements of the knot groups of some 3-strand pretzel knots	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Bulletin of the Australian Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 305-318
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1017/S0004972718000539	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tetsuya Ito, Kimihiko Motegi, Masakazu Teragaito	4. 巻 147
2. 論文標題 Generalized torsion and decomposition of 3-manifolds	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 4999-5008
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1090/proc/14581	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kazuhiro Ichihara, Kimihiko Motegi, Masakazu Teragaito	4. 巻 264
2. 論文標題 Vanishing nontrivial elements in a knot group by Dehn fillings	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 223-232
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tetsuya Ito, Kimihiko Motegi, Masakazu Teragaito	4. 巻 -
2. 論文標題 Nontrivial elements in a knot group that are trivialized by Dehn fillings	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kimihiro Motegi, Masakazu Teragaito	4. 巻 60
2. 論文標題 Generalized torsion elements and bi-orderability of 3-manifold groups	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Canadian Mathematical Bulletin	6. 最初と最後の頁 830-844
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) http://dx.doi.org/10.4153/CMB-2017-008-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件 (うち招待講演 5件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 Masakazu Teragaito
2. 発表標題 Generalized torsion in 3-manifold groups and normal closures of slope elements
3. 学会等名 Ordered groups and rigidity in dynamics and topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masakazu Teragaito
2. 発表標題 Generalized torsion and Dehn filling
3. 学会等名 The Third Pan Pacific International Conference on Topology and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masakazu Teragaito
2. 発表標題 Formal semigroups and Alexander polynomials of doubly primitive knots
3. 学会等名 Knot Theory on Okinawa (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 寺垣内 政一
2. 発表標題 長さ3のプレツェル結び目の結び目群の正規生成元
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 寺垣内 政一
2. 発表標題 Fractional Fibonacci groupに含まれるgeneralized torsion
3. 学会等名 Geometric Topology of low dimensions (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 寺垣内 政一
2. 発表標題 3次元多様体の基本群に含まれる共役ねじれ元と両側不変順序
3. 学会等名 拡大K00Kセミナー2017
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Masakazu Teragaito
2. 発表標題 Generalized torsion elements and bi-orderability of 3-manifold groups
3. 学会等名 The 2nd Pan Pacific International Conference on Topology and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Masakazu Teragaito
2. 発表標題 Generalized torsion elements and bi-orderability of 3-manifold groups
3. 学会等名 3-manifold workshop (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 寺垣内政一
2. 発表標題 3次元多様体の基本群に含まれる共役ねじれ元と両側不変順序
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考