2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　　元 年　　６ 月 １１ 日現在

機関番号：１６４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2018
課題番号：１６Ｋ０５１５０

研究課題名（和文）組合せ論的手法による代数的位相幾何学の研究

研究課題名（英文）The study of algebraic topology by the combinatorial method

研究代表者
逸見　豊（Hemmi, Yutaka）

高知大学・その他部局等(名誉教授)・名誉教授

研究者番号：７０１８１４７７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,400,000円

研究成果の概要（和文）：得られた成果は以下の通りである，（１）有限T_0空間をposetと見たときの比較可能対を比較可能対に写す写像（CP写像）間のホモトピーの自然な定義，（２）それにより与えられる有限T_0空間の拡張された圏Ftopexにおけるホモトピー論が順序複体を対応させる関手により，単体複体の強ホモトピーによるホモトピー論と対応すること．（３）極小空間が圏Ftopexにおいてもよい性質を持つこと．（４）位相空間の圏で定義される任意のホモトピー不変な関手がFtopexに拡張できること，（５）ホモトピー群のFtopexにおける具体的な定義と，CP写像からホモトピー群の準同型写像が誘導されることなどである．

研究成果の学術的意義や社会的意義
有限T_0空間と有限posetを同一視したとき，poset間の比較可能対を比較可能対に写す写像に対応する有限T_0空間に自然にhomotopyが定義され，それにより，拡張された有限T_0空間の圏から単体複体の圏への順序複体関手が定義されるが，それがホモトピー圏の充満かつ忠実な関手になることが分かっており，この対応を用いたホモトピー論的研究は興味深い．今回得られた結果により，通常の連続写像を射とした有限T_0空間の圏で行える様々な議論が，この拡張された圏でも可能になり，それにより単体複体の組合せ論に新たな手段が開ける可能性を与えるものである．

研究成果の概要（英文）：The results are following: (1) Natural definition of homotopy between maps preserving comparable pairs (CP-maps) of finite T_0-spaces considered as posets, (2) by this definition of homotopy, the homotopy theory of the extended category Ftopex of finite T_0-spaces and the homotopy theory of the category of simplicial complexes by strong homotopy corespond via the functor defined by the order complex, (3) the minimal complexes have good properties in the category Ftopex, (4) any homotopy invariant functor defined in the usual category of topological spaces can be extended on the extended category Ftopex, and (5) a definition of the homotopy groups on the category of Ftopex and the fact that the CP-maps induce homomorphisms on the homotopy groups.

研究分野：Algebraic Topology

キーワード：有限位相空間　順序複体　有限位相空間の圏の拡張　ホモトピー　強ホモトピー　ホモトピー関手　極小有限空間

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

（１）　任意の単体的複体 K に対し，その単体全体の集合 X(K)は自然に有限半順序集合（有限 poset）としての構造を持ち，それにより単体的複体の組合わせ論的手法による研究が可能となる．逆に，任意の有限 poset P は，その全順序部分集合を単体とみなすことにより P の順序複体と呼ばれる有限単体的複体 K(P)が得られる．これらの対応はお互いの逆対応になってはいないが，任意の単体的複体 K に対し，K(X(K))は K の重心細分になり，その意味で本質的には逆対応と考えることもできる．一方，任意の有限集合 P に対し，その上の poset 構造と T_0 分離公理を満たす位相空間（以下 T_0 空間とよぶ）の構造は一対一に対応する．よって，有限 poset と有限 T_0 空間を同一視することにより，任意の有限単体的複体 K に対し，X(K)は有限 T_0 空間と見なせ，逆に任意の有限 T_0 位相空間 P に対し，順序複体 K(P)が定義される．

（２）　McCord は任意の有限 T_0 空間 P からその順序複体の幾何学的実現|K(P)|への自然な対応 P→|K(P)|が連続写像になり，さらに弱ホモトピー同値であることを示した．同時に，任意の単体的複体 K に対し弱ホモトピー同値写像 X(K)→|K|も構成できる．これにより，単体分割可能な空間（あるいは CW 複体）上の代数的位相幾何学が有限位相空間上の代数的位相幾何学に翻訳される．

２．研究の目的

（１）　上記対応 K および X は，有限 poset とその間の順序を保つ写像の圏 Fpos と有限単体複体と単体写像の圏 Fsc への間の関手 K:Fpos→Fsc, X:Fsc→Fpos を与える．しかし，関手 K は忠実であるが充満ではないことが分かっており，それにより様々な問題が生じている．そこで，比較可能な対を比較可能な対に写す有限 poset 間の写像（以下 CP 写像とよぶことにする）を考え，それらを射とする有限 poset の拡張された圏 Fposex を考えると，関手 K は拡張 K:Fposex→Fsc を持ち，さらにこの関手は忠実かつ充満であることが分かる．ここで，有限 poset 間の順序を保つ集合は，対応する位相構造に関して連続になることが分かっており，その意味で圏 Fpos は有限 T_0 空間と連続写像の圏 Ftop と同一視できる．

（２）　そこで有限 poset の間の CP 写像に対応する有限 T_0 空間の間の写像を射として，圏 Ftop を拡張した圏 Ftopex を考え，そこにおけるホモトピー論を展開することが本研究の目的である．主なる目的は基礎理論の構築であり，そのうえで単体複体のホモトピー論への応用が次の目的となる．

３．研究の方法

（１）　最初に，CP 写像の間のホモトピーを構成する．そのためには，有限 T_0 空間の間の連続写像のホモトピーを圏 Ftop の中で構成する．それを CP 写像の間のホモトピー（CP ホモトピー）に拡張する．

（２）　次に，CP ホモトピーの基本的性質を知らべ，その結果を用いて，圏 Ftopex の構造を調べる．特に，極小空間の性質や，Ftop からのホモトピー不変関手を Ftopex からの関手として拡張する．

４．研究成果

（１）　有限 T_0 空間の CP 写像間のホモトピーは研究開始以前に定義していたが，その定義に多少不自然なものもあり，まずその定義をより自然なものに修正した．そのために，通常の連続写像の間のホモトピーを見直した．連続写像 f,g:X→Y の間のホモトピーは連続写像 H:X×I→Y により定義される．ここで，I は単位区間であり，そのため X が有限 T_0 空間でも，X×I は有限ではなく，写像 H は有限 T_0 空間の圏 Ftop の中で与えられない．そこで，poset J_n={v_0<u_1>v_1<u_1>...<u_n>v_n}を考えると，その順序複体の幾何学的実現|K(J_n)|は任意の n に対し，単位区間 I と同相になり，さらに X,Y が有限 T_0 空間であれば，f と g がホモトピックであることと，ある n と連続写像 H:X×J_n→Y で H(x,v_0)=f(x)，H(x,v_n)=g(x)を満たすものが存在することが同値になる．そこでこれを一般化し，有限 T_0 空間 X,Y 間の CP 写像 f,g:X→Y に対しても，上記の性質を満たす CP 写像 H:X×J_n→Y が存在することと定義をする．このようにして与えられたホモトピー（これを以後 CP ホモトピーとよぶ）は通常のホモトピーと同様の性質を持ち，さらに，CP 写像 f,g が CP ホモトピックである必要十分条件が，誘導される単体写像 K(f),K(g)：K(X)→K(Y)が強ホモトピックであることとなる．これにより，有限 T_0 空間の拡張された圏 Ftopex における自然な形のホモトピー論が定義され，それ

が単体複体の強ホモトピーによるホモトピー論と対応するようにできた.

（２） さて，このように定義された Ftopex における CP ホモトピーの基本的性質を調べた．最初に，極小空間に関してしらべた．極小空間とは，ホモトピー同値な部分空間は自分自身であるような有限 T_0 空間である．任意の有限 T_0 空間はそれの強変位レトラクトとなる極小な部分空間を，同相を除いて一意的に持ち，それは核と呼ばれている．これにより，任意の有限 T_0 空間に対しそれとホモトピー同値な極小空間が存在する．また，極小空間間のホモトピー同値写像は同相写像になり，その結果，例えば極小空間の自己ホモトピー同値写像群は自己同相群と一致するなど，極めて良い性質を持ち，有限 T_0 空間の様々なホモトピー論的性質は，その核を調べることにより分かるという事実がある．そこで，有限 T_0 空間の拡張された圏 Ftopex においても同様なことが言えるかが問題となる．得られた結果は，極小空間は圏 Ftopex においても同様な性質を持つという事実である．すなわち，任意の有限 T_0 空間に対し，その核はそれの CP ホモトピーによる強変位レトラクトとなる．また，極小空間間の CP ホモトピー同値写像は CP 同相写像になり，その結果，極小空間の自己 CP ホモトピー同値写像群は自己 CP 同相群と一致するなどもわかる.

（３） 次に，Ftop で定義されるホモトピー不変な関手を Ftopex に拡張することを考えた．例えば，ホモトピー群は，通常の空間と同様に有限 T_0 空間 X に対しても，球面からの連続写像のホモトピー類で定義される．Ftopex においては，CP 写像 $f:X\to Y$ に対し，その誘導準同型写像は通常の合成写像を用いて定義はできない．そこで，この問題について研究を行い，Ftop で定義される任意のホモトピー不変な関手が自然に Ftopex にも拡張できることを示した．具体的には，任意の CP 写像 $f:X\to Y$ に対し，有限 T_0 空間 Z と連続写像 $\phi:Z\to X$，$\psi:Z\to Y$ で ϕ は弱ホモトピー同値であり，$f\phi$ と ψ が CP ホモトピックであるものが存在する．よって，これを用いて，ホモトピー不変関手 h_* に対し，$h_*(f)$ を $h_*(\psi)\ h_*(\phi)^{-1}$ で定義する．ここで，この定義は 3 対 (Z,ϕ,ψ) の取り方によらず決まることが示され，これにより $h_*(f)$ が well-defined になり，関手 h_* が拡張された圏 Ftopex 上に定義される.

（４） 以上で一般的に拡張が得られたが，ホモトピー群などの具体的なものに対し，より具体的な形で CP 写像から誘導される準同型写像を定義することを考えた．ホモトピー群は球面からの連続写像のホモトピー類で定義されるが，球面は有限 T_0 空間でないため，まず，この定義を圏 Ftop の中で定義することから考えた．まず，前出の J_n を用いて，積空間 $J_{n_1}\times\ldots\times J_{n_k}$ からの連続写像のホモトピー類としてホモトピー群が定義可能であることを示した．ここで，$J_{n_1}\times\ldots\times J_{n_k}$ からの CP 写像の CP ホモトピー類を考えると，これもホモトピー群と同型になることが分かり，これを用いて定義すれば，CP 写像の誘導準同型写像が自然に定義され，Ftopex 上のホモトピー群関手が定義できることが示される.

（５） 一方，高次元ホモトピー群は逐次ループ空間の基本群としても定義される．よって，有限 T_0 空間のループ空間を定義しそれを用いることも一つの選択肢である．しかし，一般の空間に対してもコンパクト空間のループ空間は非コンパクトになり，よって圏 Ftop の中でもループ空間を考えることは不可能である．方法としては，無限の場合を考慮して Alexandroff 空間を考えるか，あるいは有限 T_0 空間の射影系を考えるかが考えられる．前者は有限の時と異なり，簡単に CP 写像と CP ホモトピーを定義することが困難である．一方後者も射影系の圏を考えるには時間が必要になり，いずれの場合も今回の研究では成果が得られなかったため、今後の課題と考えている.

（６） 上記成果のほかに，レンズ空間上のベクトル束の安定拡張性，H 空間の分解，自己写像集合に関する成果も得た.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計７件）

① Toshihiro Yamaguchi and S.Yokura, Poset-stratified space structures of homotopy sets, Homology, Homotopy and Applications, 査読有, Vol.21 No.2, 2019, 1-22
DOI: http://dx.doi.org/10.4310/HHA.2019.v21.n2.a1
② Yutaka Hemmi, Review on higher homotopies in the theory of H-spaces, Math. J. Okayama Univ., 査読有, Vol. 60, 2018, 1-36
③ Nobuyuki Oda and Toshihiro Yamaguch, Self-maps of spaces in fibrations, Homology,

Homotopy and Applications, 査読有, Vol.20 No.2, 2018, 289-313
DOI: http://dx.doi.org/10.4310/HHA.2018.v20.n2.a15
④ Jin-Ho Lee and Toshihiro Yamaguchi, Certain maps preserving self-homotopy equivalences, J. Homotopy Relat. Struct., 査読有, Vol. 12 No.3, 2017, 691-706
DOI: 10.1007/s40062-016-0144-0
⑤ Nobuyuki Oda and Toshihiro Yamaguch, Self-homotopy equivalences and cofibrations, Topology and its Applications, 査読有, Vol.228, 2017, 341-354
DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.topol.2017.06.012
⑥ Yutaka Hemmi and Teiichi Kobayashi, Stable extendibility of some complex vector bundles over lens spaces and Schwarzenberger's theorem, Hiroshima Mathematical Journal, 査読有, Vol.46 No.3, 2016, 333-341
⑦ Yutaka Hemmi and Hirokazu Nishinobu, Mod p decomposition of H-spaces of low rank, Publ. RIMS, 査読有, 52 2016, 207-221
DOI 10.4171/PRIMS/178

〔学会発表〕（計１件）
① **山口俊博**, On self-closeness numbers, **福岡ホモトピー論セミナー**, 2019

６．研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：山口俊博

ローマ字氏名：Toshihiro Yamaguchi

所属研究機関名：高知大学

部局名：教育研究部自然科学系理工学部部門

職名：教授

研究者番号（8 **桁）：**
９０３４６７００