様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

**科研費**
KAKENHI

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 ６ 月　 ４ 日現在

機関番号：１７１０２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2018
課題番号：１６Ｋ０５１５１

研究課題名（和文）多重線形写像の実射影空間への像とテンソル階数への応用

研究課題名（英文）The image by multilinear map to the real projective space and an application to the rank of tensors

研究代表者
角　俊雄（Sumi, Toshio）

九州大学・基幹教育院・教授

研究者番号：５０２５８５１３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：3次元配列であるテンソルについて，計算の複雑さの一指標であるランクに関して研究をした．ランクの決定は容易ではない．最小の典型ランクが p+1 であるようなmxnxp型のテンソルがランク p+1 を持つための条件を見つけた．ここに，典型ランクは，ランクとして正の確率で起こる数のことである．更に，表現空間の与える情報、特に巡回部分群による固定点集合の次元について調べた．巡回部分群による固定点集合の次元のみでは期待されている結果を判定できない群の存在も示した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
テンソルの階数１テンソルの和への分解は，行列においては，特異値分解に対応し，その拡張である．テンソルとは高次元配列のことである．テンソルの階数は，従来，計算の複雑度の尺度として用いられていたが，近年，テンソルの階数１テンソルの和への分解（の近似）が，シグナルプロセッシング，データマイニング，コンピュータビジョン，グラフ解析など様々な分野で応用が見られるようになった．実験データとして得られることが多い実数体上のテンソルの階数の研究はまだ非常に少ないため，それらの研究を行った．

研究成果の概要（英文）：A 3-tensor is a 3-way array.  The determination of the rank, a measure of complexity of computation, of a tensor is difficult (NP-hard).  In this study, I tried to determine the ranks of certain tensors.  I found a condition for tensors with size (m,n,p) such that the set of tensors with size (m,n,p) has p+1 as the minimal typical rank, which is the minimal number occurring as a rank with positive probability, to have p+1 as the rank. Further I study representative spaces, and in particular, the dimensions of the fixed point sets of a representative space by cyclic subgroups. I showed there exists a finite simple group which does not have the expectative property.

研究分野：トポロジー

キーワード：テンソル　ランク　多重線形写像　群作用

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

## １．研究開始当初の背景

テンソルのランク１テンソルの和への分解（の近似）は，最近，シグナルプロセッシング，データマイニング，コンピュータビジョン，グラフ解析など様々な分野で応用が見られるようになった．ところが，行列の場合はランクが容易に計算できるのに反し，ランクの計算が非常に難しい．近似と関係するのは，典型ランク、ボーダーランクである．これらは，基礎体に依存する．ボーラーランクは，典型ランクの最大数以下である．複素数体上のテンソルに関する研究は多くあるが、実データ解析等に応用が見込まれる実数板状のテンソルに関する研究はまだ少ない状況である．

## ２．研究の目的

テンソルのランク１テンソルの和への分解は，行列においては，特異値分解に対応し，その拡張である．ランクが一定のテンソルの集合がテンソル全体の集合のなかで，どのような配置をしているのかを解明する．実数体および複数体上のテンソルのランクの性質について考察を行うとともに，ランクが r であるテンソルのなす空間やランクが r 以下であるテンソルのなす空間の性質について研究を行う．そのことにより，分解の近似の最適化やよりよい近似方法が得られると期待できる．テンソルのランクに関しては，代数幾何，イデアル論，トポロジーと様々な分野にまたがる知識を必要とする．
mxnxp 型のテンソル全体からなる空間は，mnp 次元の F 上のベクトル空間と同一視でき，ランクは、$GL_m(F)$ x $GL_n(F)$ x $GL_p(F)$ の作用により不変である．一方，実数成分の(2,2,2)型のテンソルの実数体上のランクは 3 であるが，複素数体上のランクは 2 であるものが存在し，ランクは，体に依存する．近年，テンソルの階数は，実データ解析に応用されており，階数に関する情報は有益である．テンソルが与えられたとき，そのテンソルが階数 1 以下であるかは容易に判定できる．ランクの定義から，mxnxp 型テンソルのランクの上界が mxnxp 型テンソル空間の次元 mnp となることはすぐにわかるが，min(mn,np,pm)も上界を与える．mxnx2 型テンソルに関しては,ペンシルの理論から分類ができていて,ランクについてもよくわかっている.mxnxp 型テンソルのランクの上限は min(m+[n/2],[m/2]+n) である [J]．型が大きくなると途端に難しくなり，一般には個々のテンソルの階数を求めることは NP 完全である [H]．Hurwitz-Radon 数が正則な２重線形写像 $R^m$ x $R^n \to R^n$ の存在する m の上限を与えることは，Adams [A] による代数的トポロジーの手法によって求められた．正則な２重線形写像は典型ランクが一意かどうかと係わってくる．代数トポロジーの観点から，テンソルのランクや，ランク r のテンソル全体の空間から見ることによる特徴づけを与える．多重線形写像の像としての空間について，変換群論的考察を含め，像の関係を明確にすることにより，いくつかの階数の関係，性質を求め，実データ解析の手法へ結びつける．更に，群作用の立場から表現空間の与える情報を取り出す．

参考文献
[A] J. F. Adams. Vector fields on spheres. Ann. of Math. (2), 75:603-632, 1962.
[H] J. Ḧastad. Tensor rank is NP-complete. Journal of Algorithms, 11:644-654, 1990.
[J] J. Ja’Ja’. Optimal evaluation of pairs of bilinear forms. SIAM J. Comput., 8(3):443-462, 1979.

## ３．研究の方法

（１）体 F 上の mxnxp 型のテンソル $(a_{i,j,k})$とは，mnp 個の F の要素 $a_{i,j,k}$, $1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq n$, $1 \leqq k \leqq p$ の集まりである．体 F 上の mxnxp 型のテンソル全体の集合を $T_F(m,n,p)$ と表す．ゼロテンソルはすべての成分が 0 であるテンソルであり，ランク 1 テンソルとは，$a_{i,j,k}=x_i y_j z_k$ の条件を満たすゼロテンソルでないテンソルのことである．ランク１テンソルは、多重線形写像 $\Phi_1$: $F^m$ x $F^n$ x $F^p \to T_F(m,n,p)$,

$$\Phi_1((x_1,...,x_m),(y_1,...,y_n),(z_1,...,z_p))=(x_i y_j z_k)$$

の像で得られる．自然数 r に対し，r 個のランク１テンソルの和で表される集合を $T_F(m,n,p;r)$ と書くと，差集合 $T_F(m,n,p;r)$ - $T_F(m,n,p;r-1)$に含まれるテンソルのランクを r と定める．
多重線形写像$\Phi_r$は r 個の$\Phi_1$の和で与えられ，$T_F(m,n,p;r)$は$\Phi_r$の像空間と一致する．
テンソルのランクは体に依存する．体 F に対し、F 上 mxnxp 型テンソルのランクの最大値を $maxrank_F(m,n,p)$と表す．$maxrank_C(m,n,p) \leqq maxrank_R(m,n,p)$が成立するが，現状等号が成立しない例は知られていない．差集合 $T_F(m,n,p;r)$ - $T_F(m,n,p;r-1)$は半代数的集合となるが，この次元が mnp と一致するとき，r を $T_F(m,n,p)$の典型ランクという．$trank_F(m,n,p)$にて $T_F(m,n,p)$の典型ランク全体の集合を表す．複素数 C 上の典型ランクは１つに定まることが知られており，その数自身を grank(m,n,p)と表す．一般に R 上の典型ランクは１つにならないが，grank(m,n,p)は $trank_R(m,n,p)$の中の数の最小数となる．$trank_R(m,n,p)$の中の数の最大数は $maxrank_R(m,n,p)$以下であるが，一般に等号は不成立である．例えば，$trank_R(n,n,2)=\{n,n+1\}$ で

あるが，$\mathrm{maxrank}_R(n,n,p)=[3n/2]$である．$\mathrm{grank}(m,n,p)$は多重線形写像$\Phi_r$のヤコビ行列がフルランクとなる最小の r と一致し，「mnp/(m+n+p-2)」と一致することが多い．ここで，「a」は a 以上の最小整数を表す．一般に，最大ランクは確率０でしか起こらないことが最大ランクが複素数体でも実数体でも変わらない原因なのかもしれない．
本来，テンソルが与えられたとき，そのランクが求められないことが問題を複雑にしている．この結果は，における典型ランクに関する研究が役に立っている．
坂田氏，宮崎氏との共同研究にて $\mathrm{grank}(m,n,p)=p$, $3\leqq m\leqq n\leqq p$, $(m-1)(n-1)+2\leqq p\leqq mn$ については典型ランク $\mathrm{trank}_R(m,n,p)$が複数ある場合，p+1 となるテンソルの確率１による性質を決定し， $p=(m-1)(n-1)+1$ の場合は $p>(m-1)(n-1)+1$ 以上の場合と状況が異なっていることが判明した．$\mathrm{trank}_R(m,n,p)$が複数ある条件を一般に考察し、$\mathrm{trank}_R(m,n,(m-1)(n-1))$の決定につなげる．
（２）ランクはテンソル空間と同一視できるユークリッド空間へのある線形作用で不変であった．群 G 作用の立場からすると，部分群による固定点集合の次元にどのようなものが現れるかが，軌道空間と関連する．特に，表現空間 V,W の間の同変写像 $f: V \to W$ が isovariant とは，任意の点 $x\in V$ に対し，isotoropy 部分群に関して一致： $\{g\in G \mid gx=g\}=\{g\in G \mid gf(x)=g\}$ することである．自由な写像のときと同様に，isovariant 写像 f:には，V，W の固定点集合の次元の間に制限があるはずである．表現空間の部分群 H による固定点の次元は，指標を用いて計算できる．指標は，元の共役類で決まっているため，群 G の巡回群により固定点の次元は決まる．そこで，巡回群による固定点の次元の情報から，V，W の次元の大小関係についての影響を調べる．
（３）twisted Alexander 多項式は Alexander 多項式の拡張であり，結び目・絡み目の捕空間の基本群とその表現に関して与えられる一般には有利関数である．2 次元結び目のある族に対し，twisted Alexander 多項式を適用し，分類を行う．

４．研究成果
（１）3x3xp 型テンソルの種々のランクの値の考察
ペンシルの理論（Kronecker-Wierstrass 理論）により，3x2x5 型テンソルは確率１で群変換にて１通りの形に直せる．そこで，そのテンソルにうまいランク１である 3x5 行列を加えて 3x3x5 型テンソルを作り，そのランクが 7 であることを示した．このことから $\mathrm{maxrank}_C(3,3,5)=\mathrm{maxrank}_R(3,3,5)=7$ が従う．
非負整数 r が 3x3xp 型テンソル全体の集合 $T_F(3,3,p)$の典型ランクとは，r が確率正で 3x3xp 型テンソルのランクとなることであった．「a」で a 以上の最小整数を表すと，多重線形写像の次元の比較から，$\mathrm{trank}_C(m,n,p)\geqq$「mnp/(m+n+p-2)」 なのだが，m=n=p=3 のとき「mnp/(m+n+p-2)」=4 であるが，grank(3,3,3)=5 であり一般に等号は成立しない．Strassen により，m=n=2k+1,p=3 のとき grank(m,n,p)= 「mnp/(m+n+p-2)」+1 が示されている． mxnxp 型ランク１テンソルを与える多重線形写像 $F^m xF^n xF^p \to T_F(m,n,p)$の r 個の和で与えられる多重線形写像$\Phi_r$により，ランク r 以下のテンソルはその像に含まれる．grank(m,n,p)は多重線形写像$\Phi_r$のヤコビ行列がフル列ランクとなる最小の r と一致し，通常は等号が成立することが多い．先行研究で $\mathrm{grank}(m,n,p)=p$, $3\leqq m\leqq n\leqq p$, $(m-1)(n-1)+2\leqq p\leqq mn$ については典型ランク $\mathrm{trank}_R(m,n,p)$が複数ある場合，p+1 となるテンソルの確率１による性質を決定し， $p=(m-1)(n-1)+1$ の場合は $p>(m-1)(n-1)+1$ 以上の場合と状況が異なっていた．そのことが，$\mathrm{trank}_R(m,n,(m-1)(n-1))$の決定の障害となっている．$\mathrm{trank}_R(3,3,5)=\{5,6\}$を活用し，$\mathrm{trank}_R(3,3,4)$の決定するため，$\mathrm{grank}(m,n,p)=p+1$ である場合の $\mathrm{trank}_R(m,n,p)=\{p+1\}$であるための条件を見つけたが，自由度が高くその条件を満たすかどうかの判定が難しい．そのため，$\mathrm{trank}_R(3,3,4)$は{5}または{5,6}のいずれかであるかを決め切れなかった．

| p | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | >8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{maxrank}_C(3,3,p)$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 |
| $\mathrm{maxrank}_R(3,3,p)$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 |
| $\mathrm{trank}_C(3,3,p)$ | {3} | {3} | {5} | {5} | {5} | {7} | {8} | {8} | {9} |
| $\mathrm{trank}_R(3,3,p)$ | {3} | {3,4} | {5} | | {5,6} | {7} | {8} | {8} | {9} |

3x3x3 型テンソルの最大ランク $\mathrm{maxrank}_R(3,3,3)$が５以下である証明もそう簡単ではない．3x3x4 型テンソルの典型ランクの評価を行うために，$\mathrm{maxrank}_R(3,3,3)=5$ であるテンソルの条件を考察した．以前はいくつかの代数方程式の解としての証明しかわからなかったが，ランク縮小定理を用いる簡単な証明を与えた．ランク１テンソルの５個の和での表し方は一意でも有限通りでもないことが知られているが，同値なテンソルへの変換を経由してランク縮小定理を用いるため，すべての表し方を与えるわけではない．逆に言えば，その程度で評価できてしまうが，そのことが 3x3x4 型テンソルの典型ランクを決定できない障害となっている．

（２）非負実数の制限をつけたテンソルの制限付きランクの最大値に関して
非負実数を成分に持つテンソルを非負テンソルという．非負テンソルをランク１非負テンソルの和で表すことができる個数の最小数を非負ランクと定める．$R_{\geqq 0}{}^{m}$にて非負実数を成分に持つ m 次元ベクトル全体の集合を表すことにする．多重線形写像$\Phi_1$の $R_{\geqq 0}{}^{m} \times R_{\geqq 0}{}^{n} \times R_{\geqq 0}{}^{p}$への制限から得られる $\Phi_r$ の像に含まれるテンソルは非負ランクが r 以下となる．通常のランクとは様相が異なり，mxnxp 型非負テンソルの非負ランクの最大値は min(mn,np,pm) であり，境界近くのテンソルのランクはその値をとることが知られている．よって，典型ランクは grank(m,n,p) 以上 min(mn,np,pm) 以下の整数全体となる．非負テンソル全体の集合は凸集合なので，近似を求めることも容易である．実データでは、一部の方向にのみ非負なる条件が入る場合がある．多重線形写像$\Phi_1$の $R_{\geqq 0}{}^{m} \times R_{\geqq 0}{}^{n} \times R^{p}$への制限から得られる $\Phi_r$ の像に含まれるテンソル T を一部非負ランクが r 以下であるとし，一部非負ランク pnrank(T) を定義することができる．$\mathrm{rank}_{R}(T) \leqq \mathrm{pnrank}(T)$ より，ランクの上限を与えることができ，今後の検討課題である．

（３）有限群の表現空間間の isovariant 写像が存在するための条件
原点以外群 G 全体での固定点を持たない表現空間間の isovariant 写像 f: V → W について，dim V≦dim W が成立することが期待されている．特に，有限群 G が巡回群の場合には正しい．そのため，巡回群による固定点の情報から，dim V≦dim W がいつ導けるかを考察した．反例があるとすれば，単純群にて見つかるので，その点を考慮し検討した．巡回群による固定点のみの情報から導けるかは，整形計画法にて与えられることを示し、交代群 $A_n$ (n≦21)については正しいことを示した．交代群 $A_{22}$については，巡回群による固定点のみの情報だけからは導けないことも示し、巡回群でない部分群による情報も必要であることがわかった．

（４）twisted Alexander 多項式を用いた 2-knot の分類
結び目を区別するのに不変量が使われる．2 次元結び目の特別な族に対し， twisted Alexander 多項式を主に使い分類を行った（金信氏との共同研究）．twisted Alexander 多項式は、結び目群の表示とその表現により与えられる．可換表現による twisted Alexander 多項式は Alexander 多項式と同じ強さしかもたない．2 生成元の群の SL(2,C)表現はよく知られているので，そのことから得られる理論の整理や Mathematica や GAP を用いて SL(2,F)表現(F は複素数体か有限体)を計算した．

５．主な発表論文等

＜引用文献＞

〔雑誌論文〕（計２件）

① 金信泰造、<u>角俊雄</u>、Classification of a family of ribbon 2-knots with trivial Alexander polynomial、Communications of the Korean Mathematical Society、査読有、Vol.33、No.2、2018、pp. 591-604、
http://doi.org/10.4134/CKMS.c170222
② <u>角俊雄</u>、A sufficient condition for a finite group to be a Borsuk-Ulam group、RIMS 講究録、査読無、Vol.2098、2018、pp.148-161、
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2098-21.pdf


〔学会発表〕（計３件）

① <u>角俊雄</u>、A sufficient condition for a finite group to be a Borsuk-Ulam group、京都大学数理解析研究所 共同研究（公開型）、 2018
② <u>角俊雄</u>、Sufficient condition to be a Borsuk-Ulam group、 UMI-SIMAI-PTM、 2018
③ <u>角俊雄</u>、SL(3, $F_q$) is a BUG or ...、 Workshop on Geometric Discrete Mathematics II、2018


〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕
ホームページ等 http://www.artsci.kyushu-u.ac.jp/~sumi/

６．研究組織

(1)研究分担者　なし

(2)研究協力者　なし

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。