

令和元年6月13日現在

機関番号：24402

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05153

研究課題名(和文) 錐双曲多様体の標準的基本領域とホロノミー表現

研究課題名(英文) Canonical fundamental domains and holonomy representations for cone hyperbolic manifolds

研究代表者

秋吉 宏尚 (Akiyoshi, Hirotaka)

大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：80397611

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題は穴あきトーラス群に対するJorgensen理論の錐多様体への拡張とそのための基礎理論の整備を目的とする。基礎理論においては、錐双曲構造に関するFord領域、コンパクト閉凸核の概念などを導入し、Ford・Dirichlet領域の持つ安定性を示した。具体的な錐多様体の変形に関しては、Fuchs表現と薄い表現について詳細な観察を行うとともに、2橋結び目錐多様体の双曲構造へとつながる道の存在を強く示唆する現象を数値的に観察することに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

大部分の3次元多様体は双曲構造に支配される。また、双曲多様体は双曲空間の等長変換群の離散部分群と対応する。したがって、双曲等長変換の組が与えられたときに、それらが離散群を生成するかという問いは素朴ながら非常に重要な問題である。本研究ではこの問題へのアプローチとして、錐双曲構造を経由することで様々な2元生成群を「道」でつなぎ、さらに、標準的な基本領域の組み合わせ構造を特徴付けることで上記の基本的な問題への手がかりを与えることを目的としたものである。基本的な問題の完全解決には至っていないが、基礎理論の整備と新しい「道」の候補を発見したことは大きな前進である。

研究成果の概要(英文)：The aim of this project is to generalize Jorgensen's theory on punctured torus groups to cone hyperbolic structures, by carefully preparing basic theory on the deformation of cone hyperbolic structures. We established the concepts of Ford domains and compact closed convex cores for cone hyperbolic manifolds, and showed a kind of stability that Ford and Dirichlet domains have. As for coned torus manifolds, we obtained a deep understanding for Fuchsian and thin representations. We also obtained a numerical result which strongly suggests the existence of a way from coned tori to 2-bridge cone manifolds.

研究分野：低次元トポロジー

キーワード：双曲幾何 錐多様体 基本領域 2橋結び目 穴あきトーラス Ford領域 Dirichlet領域

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

錐双曲構造の変形に関する研究の歴史は長く、Thurston, Hodgson-Kerckhoff, Boileau-Leeb-Porti, Kojima, Bromberg, Moroianu-Schlenker, Lecuire-Schlenker 他の研究を通して、その変形空間の解析的パラメータなどが詳しく調べられてきた。変形空間の可視化などの問題へのアプローチとしては、より代数的なパラメータ(ホロノミー表現)が有効であるにもかかわらず、与えられた表現が(錐)双曲構造のホロノミー表現であるかという意味での幾何学的実現可能性の問題は、基本領域の発見と密接に関わるため、クライン群論においても解析的変形理論ほど一般的な結果は得られていなかった。ほぼ唯一といえる大きな成功は、穴あきトーラス・クライン群に対する標準的基本領域(Ford 領域)の組み合わせ構造を決定するという Jorgensen 理論とその拡張にもとづくものであった。その理論は Jorgensen による未完の論文で主張されたものをさすが、その完全な証明と拡張が研究代表者の作間誠氏、和田昌昭氏、山下靖氏による共同研究により与えられていた。

2. 研究の目的

本研究の主目的は、2元生成自由群の $PSL_2(C)$ 表現で生成元の交換子積の像が楕円的であるようなものに対し、それが3次元錐双曲構造のホロノミー表現として実現されるための条件を特徴づけることである。上記の Jorgensen 理論の拡張に基づいて、2つの放物的元が生成する $PSL_2(C)$ の部分群全体からなる空間およびその外部空間に含まれ、二橋結び目または絡み目補空間の双曲構造へとつながる錐双曲構造の可視化が山下氏により得られている。本研究は Jorgensen 理論の対象であった穴あきトーラスの「穴」を「錐特異点」へと取り換えることにより得られる拡張にもとづき、上記の可視化に関する先行研究に対応する拡張も目指すものである。その直接的な応用として、二橋結び目または絡み目を特異点集合とする錐双曲構造の具体的構成、楕円的な2元が生成する数論的クライン群の特徴づけへの寄与が期待される。また、拡張の一部として、クライン群論における H^3 の類似として、ある $CAT(-1)$ 空間への離散群作用の連続変形族の具体例も構成される。無限遠等角構造の変形に関連して、錐特異点つきリーマン面の変形理論の基礎づけへの寄与も見込まれる。

3. 研究の方法

本研究では大きく分けて「一般的な基礎理論の整備」とその「2元生成群に関わる錐双曲構造の研究」を並行して進めた。

● 基礎理論の整備

本研究で主に研究対象とするのは、コンパクトでない錐特異点集合を持つ3次元錐双曲多様体である。Schlenker らの研究において、錐特異点つき曲面と区間の直積として定義される錐双曲多様体の擬フックス性が導入され、その変形理論が構築された。本研究では対応する条件を基本領域の観点から特徴づけることを目標とし、より具体的には、錐特異点集合上に中心を持つ Dirichlet 領域と先行研究で定義された錐双曲構造に関する Ford 領域との全体からなる族を標準的基本領域族として導入して特徴づけに用いた。

● 2元生成群に関わる錐双曲構造の研究

(i) Jorgensen 理論の錐多様体への拡張、(ii) Jorgensen 理論の錐双曲構造版 Riley slice への拡張を行った。

(i) 錐特異点を1つだけ持つトーラスと区間の直積上に Schlenker らの意味での擬フックス構造が与えられたとき、その Ford 領域の組み合わせ構造、さらに、標準的基本領域族の特徴づけを与え、与えられた表現がそれを満たすかを判定するアルゴリズムを構築することを目指した。

(ii) Series-Tan-Yamashita により導入された複素1次元パラメータを用いて、共役な楕円的2元が生成する空間へと Jorgensen 理論を拡張し、与えられた表現がそれを満たすかを判定するアルゴリズムを構築し、錐双曲構造版の描画、さらに、図の中の弧にあたる変形の極限として二橋結び目または絡み目を錐特異点集合とする錐多様体上の錐双曲構造を具体的に構成することを目指した。

4. 研究成果

● 基礎理論の整備

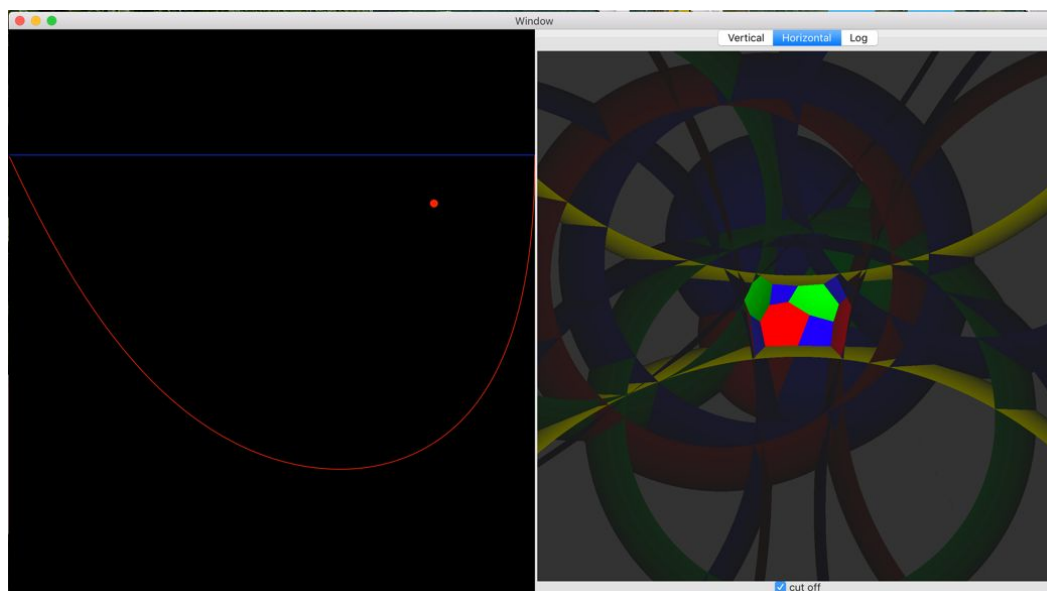
Ford 領域の定義を与え、その初等的な性質を整備した。また、錐角が 2π 未満の錐特異点を持つ曲面と数直線の直積として得られる3次元錐双曲多様体が「Ford domain が定義され、さらにある性質をもつコンパクトな閉凸核を持つ」という条件を満たすとき、中心が錐特異点上にあるような Dirichlet domain と Ford domain の組み合わせ構造がある種の安定性を持つことを証明することに成功した(学会発表)。この条件は下記(ii)で研究対象としている錐多様体に対しては満たされることも確認できる。また、錐角が 2π 未満の錐双曲構造に対して Moroianu-Schlenker により整備された一般的理論の一部を「錐角が 2π 以下の錐双曲構造」へと拡張し、定理が対象とする錐双曲構造の条件を自然な内在的な性質により記述することに成功した。この考察を通して、そのような構造に関するコンパクト閉凸核の概念を導入した。これまでの考察と組み合わせることにより、錐角が 2π 以下のコンパクト閉凸核を

持つ錐双曲構造に関しては Ford 領域および Dirichlet 領域のある種の有限性が示された。(これらの成果については論文として出版を目指して準備中である.)

● 2元生成群に関わる錐双曲構造の研究

研究構想において、本課題の申請時におけるものから大きな進展があった:本研究課題を申請するにあたり進めていた「2元生成群に関わる錐双曲構造」に関する予備的試行を通して思い至らなかったことだが、研究計画の中心に据えていた(i)と(ii)について、Ford・Dirichlet 領域の自然な連続変形族を通して、それらをつなぐ道が存在しうることに基づき、その予想を支持する具体例を(数値的に)構成することに成功した(雑誌論文)。また、(i)の拡張については、Jorgensen 理論の拡張の候補と期待される Ford domain を記述し、それが Fuchs 表現に対しては Dirichlet domain と一致することも証明した。さらに、オリジナルの Jorgensen 理論において例外的な組み合わせ構造の退化が生じうる「薄い表現」のなす空間を錐双曲構造における拡張を考察し、その空間においては「基礎理論の整備」において導入された概念としてのコンパクト閉凸核を具体的に記述することに成功した。この空間では Ford 領域の組み合わせ構造から定義される side parameter, および、閉凸核の境界として現れる錐双曲面の双曲構造という2種類の異なる大域的パラメータが存在することを示すことにも成功した。特に、後者のパラメータは Lecuire-Schlenker により提起されたコンパクト閉凸核境界の双曲構造に関する問題が肯定的に解決できる具体例を与えることになる。(この結果は雑誌論文として出版されることが決定している.)

基礎となる Jorgensen 理論の拡張として、錐特異点集合を新たに生じさせることで、4点穴あき球面上の擬フックス構造から双曲2橋絡み目補空間の双曲構造へとつながる自然な道が研究代表者と作間誠氏、和田昌昭氏、山下靖氏([ASWY])により具体的に構成されたが、上記の研究を通して調べられてきた Dirichlet 領域の考察を進めることにより、交換子積が楕円的である本研究課題の対象においても類似の理論が構築可能であると強く期待される観察が、数値実験を通して得られた。より具体的には、3次元球面を底空間とし、8の字結び目を錐特異点集合として持つ3次元錐多様体に対し、錐角が0から $2/3$ の範囲で、Dirichlet 領域を用いることで、その錐双曲構造を[ASWY]と同様の組み合わせ構造を用いて数値的に具体的に構成することに成功した。(その他いくつかの2橋結び目に対しても同種の数値実験に成功した。)さらに、そうして得られる錐双曲構造に対し、錐角を $2/3$ へと近づけていくことで、その極限として切頂八面体から得られるユークリッド構造と通約可能なユークリッド軌道体へと退化していくことも数値的に観察することに成功した。他方、Jorgensen により具体的に構成された、8の字結び目補空間から一般化デーン手術で得られる、円周上の錐特異点付きトーラス束が許容する錐双曲構造に対しても、その Dirichlet 領域の組み合わせ構造を数値的に特徴付けることに成功した(学会発表,)。



8の字結び目錐多様体の Dirichlet 領域 (学会発表 スライドより)

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 2 件)

Hirotaka Akiyoshi, Thin representations for the one-cone torus group, *Topology and its Applications*, 査読あり, 2019年(出版予定).

DOI 情報: 10.1016/j.topol.2019.06.025

Hirotaka Akiyoshi, Ford and Dirichlet domains for certain cone manifolds, 数理解

析研究所講究録，第 2062 巻，査読なし，2018 年．

〔学会発表〕(計 10 件)

Hiroataka Akiyoshi, Dirichlet domains for figure-eight cone manifolds, The 14th East Asian Conference on Geometric Topology, 2019 年．

Hiroataka Akiyoshi, From one-cone tori to two-bridge cone manifolds, Topology and Geometry of Low-dimensional Manifolds, 2018 年．

秋吉宏尚, 8 の字結び目から得られるいくつかの錐多様体の Dirichlet 領域, 研究集会「拡大 KOOK セミナー2018」, 2018 年．

Hiroataka Akiyoshi, Ford and Dirichlet domains for cone hyperbolic manifolds, The 10th KOOK-TAPU Joint Seminar on Knots and Related Topics, 2018 年．

Hiroataka Akiyoshi, Thin representations for the one-cone torus group, The 2nd Pan-Pacific International Conference on Topology and Applications, 2017 年．

秋吉宏尚, 3 次元錐双曲多様体のフォード領域とディリクレ領域に関する実験, 研究集会「トポロジーとコンピュータ 2017」, 2017 年．

秋吉宏尚, Finiteness of Ford and Dirichlet domains for 3-dimensional cone hyperbolic manifolds, 研究集会「拡大 KOOK セミナー2017」, 2017 年．

秋吉宏尚, 錐特異点つきトーラスの双曲構造の崩壊について, 拡大 KOOK セミナー2016, 2016 年．

Hiroataka Akiyoshi, Collapsing cone hyperbolic structures on the torus with a single cone point, The 8th KOOK-TAPU Joint Seminar on Knots and Related Topics, 2016 年．

秋吉宏尚, Ford and Dirichlet domains for certain cone manifolds, 離散群と双曲空間のトポロジーと解析, 2016 年．

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

研究集会「錐多様体と基本領域」

<http://www.sci.osaka-cu.ac.jp/OCAMI/activities/symposium/2017/cone2018/cone2018.html>

本研究課題の研究の遂行の一環として行った研究集会の案内の web ページである。

6 . 研究組織

(1)研究分担者

なし

(2)研究協力者

研究協力者氏名：作間 誠

ローマ字氏名：Makoto Sakuma

研究協力者氏名：山下 靖

ローマ字氏名：Yasushi Yamashita

研究協力者氏名：金信 泰造

ローマ字氏名：Taizo Kanenobu

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。