

令和 2 年 7 月 7 日現在

機関番号：26402

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05154

研究課題名(和文) 曲面の写像類群における線型性の視覚化と関連する位相幾何

研究課題名(英文) Visualization of the linearity for mapping class group and its relation to topology

研究代表者

笠原 泰 (Kasahara, Yasushi)

高知工科大学・共通教育教室・准教授

研究者番号：80299370

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：研究代表者の発見した、曲面の写像類群における「線型性の視覚化」の観点から生じる問題を引き続き研究し、それにより、この分野の基本的問題である写像類群の線型性問題が自然に解決するような理論的枠組みの構築を目指した。その結果、「線型性の視覚化」それ自体や関連する事柄についての理解を深めることができた。また特に、未解明であったうち、最も低い次元である種数 g の写像類群の $2g+1$ 次元線形表現の分類を、 g が6以上の場合に完全に解決した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

現在大きな関心を持たれている数学の基礎的研究分野であり、現実を記述する究極の理論を与えることを目指す理論物理学や、タンパク質の高次構造の記述などとの関連も期待されている。曲面の写像類群の研究において、研究代表者の発見した独自の観点である「線型性の視覚化」の観点から研究を継続し、その理解を深め、ある専門的な問題を完全に解決することができた。これにより、数学の当該研究分野の研究にある程度寄与することができたと考えられる。

研究成果の概要(英文)：We continued to study problems which arise from the viewpoint of the visualization of the linearity of mapping class groups of surfaces, which we had established some years ago, toward building the theoretical setup for solving the linearity problem for the mapping class groups which is considered as one of the fundamental problems in the field. Consequently, we could deepen our understanding of the visualization itself as well as related topics. In particular, we obtained the complete classification of the $2g+1$ dimensional linear representations of mapping class groups of surfaces of genus g for $g>5$ which was the first case of the previously unknown dimensions.

研究分野：位相幾何学

キーワード：曲面の写像類群 線型表現 曲線複体 幾何的交叉 Johnson filtration

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

1. 研究開始当初の背景

コンパクトで向き付け可能な曲面(2次元多様体)に対し、向きを保つ微分同相写像のイソトピー類全体の成す群を、その曲面の写像類群という。また、そのような曲面に穴(puncture)を許すことで、同様に穴開き曲面の写像類群が定義され、この中には Artin の組みひも群が含まれる。以下、これらを単に写像類群という。写像類群は低次元トポロジーの他、代数幾何、数論、数理物理などとも関連を持ち、現在までに様々な観点から活発に研究されており、特に最近では、その安定コホモロジー群が決定されるなど、目覚ましい成果が得られている。しかし、古くからある基本的な問題である線形性、すなわち忠実な有限次元線型表現の存在問題、については、Brendle-Hamidi-Tehrani による肯定的な証拠があるものの、Artin の組みひも群など、曲面の型が非常に単純な場合を除き、未解決のまま残っている。写像類群の線型性問題は、例えば、類似の群である自由群の自己同型群についての Formanek-Procesi による否定的結果と、前述の Brendle-Hamidi-Tehrani による証拠を対比すればわかる通り、非常に微妙な問題である。また、最近の Kida による著しい結果も、写像類群が位相群の格子となることを禁止しながらも、線型性を決定するには到っていない。

このような状況の中で研究代表者は、種数2の Jones 表現という岩堀-Hecke 環を用いて定義される具体的な線型表現の、摂動展開を用いた一連の研究を通じて、一般種数のコンパクト曲面の写像類群が線型となるために必要十分な幾何的条件を発見し、これを「線型性の視覚化」と名付けた。

研究代表者は、この観点から生じる曲面の写像類群の位相幾何的研究をすぐ開始したが、前例のない対象で難しいことも多く、まだまだ未解明の点は数多く残っていた。

2. 研究の目的

本研究は、この研究代表者が最近発見した「線型性の視覚化」の観点から生じる問題を直接研究することと、それにより、いわば間接的に、写像類群の線型性が自然に解決するような理論的枠組の構築を目指すものである。また、これらの結果として、いわゆる TQFT 表現を始めとする写像類群の既知の表現に、簡明かつ統一的な理解をもたらすことを目指す。

3. 研究の方法

本研究は数学における基礎理論の研究であり、目的達成のための筋道や手法があらかじめ決まっているわけではない。研究の進展や、あるいは進展のなささえも新たな知見として、適宜これらを組み替えつつ実施してゆく性質のものである。一方で、この研究はこれまでに行ってきた、「線型性の視覚化」の観点からの研究を継続発展してゆくものでもあり、研究の方法を簡潔に記せば、大筋はこれまでのものと変わらないことにもなりがちである。以上の注意の下で、大まかな項目を記せば以下の通りとなる:

- (1) 「線型性の視覚化」そのものの理解を理論的に深める。
- (2) 前項から生じる、代数的計算を伴う具体的問題を、購入した計算機を援用した大量の計算により実験的に調べる。
- (3) すでに知られている線型表現の性質を、「線型性の視覚化」の観点から研究する。
- (4) 「線型性の視覚化」を直接用いて、写像類群の線型性の解決を試みることで、考えるべき問題を具体的に明らかにする。
- (5) 写像類群の線形表現一般を、位相幾何的観点から検討し、「線型性の視覚化」を深める。

4. 研究成果

- (1) 写像類群の加群が内在的に持っている、曲面内の単純閉曲線のあいだの幾何的交叉の情報が、その加群に付随する線型表現の忠実性をほとんど完全に決定することを示した論文を出版した。
- (2) 前項の論文の結果を敷衍して、更に写像類群のある性質をみたす加群に対し、その上で自然に定義される写像類群の作用で不変なある線型形式と、曲面内の単純閉曲線のあいだの幾何的交叉との関係を考察し、部分的な結果を得た。
- (3) これまでに引き続き、Johnson filtration と幾何的交叉の関係を明らかにするために、Kawazumi-Kuno による Dehn twist の対数理論を援用し、基本群の巾零商への作用が、Dehn twist に係わる単純閉曲線の、基本群の巾零商における共役類をどの程度定めるかを検討し、部分的な結果を得た。
- (4) 写像類群の線型表現は、古典的な symplectic 表現以外にあまり具体例がない状態が長く続いた後、いわゆる TQFT が位相幾何学の研究対象になって以来、今度はときに「洪水」と表現

されるほど多くの具体例が出ている。しかし、写像類群の線型表現を「分類」する観点からの研究は意外に少なく、比較的最近になり Franks-Handel により symplectic 表現より次元の低いものは実質的に存在しないこと、続いて Korkmaz により symplectic 表現と同じ次元をもつ線型表現はすべて symplectic 表現と共役であること、が示されていたのみであった。彼らの結果は、すべて穴と境界とを許容する曲面の純写像類群に対するものである。研究代表者は、彼らの手法を援用、一部改良することを出発点として、分類する線型表現の次元を上げることをこれまでに試み、部分的な結果を得ていたが、本研究により、十分大きな種数の場合に、先行研究と同様の純写像類群の線型表現を、symplectic 表現より次元が1だけ高い場合に、遂に完全に分類することができた。結果は、写像類群のあるねじれ係数1次コホモロジーの言葉を用いて記述される。この結果については、国内の学会で概要を発表した後、国内の研究集会で招待講演を行った(論文は現在準備中)。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yasushi Kasahara	4. 巻 217
2. 論文標題 Geometric intersection in representations of mapping class groups of surfaces	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 31-37
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1016/j.topol.2016.12.005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 4件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 笠原泰
2. 発表標題 高種数写像類群の低次元複素線型表現について
3. 学会等名 研究会「リーマン面に関連する位相幾何学」（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 笠原泰
2. 発表標題 種数 g の写像類群の $2g+1$ 次元線型表現について
3. 学会等名 日本数学会2018年度秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 笠原泰
2. 発表標題 曲面の写像類群の線型性問題の視覚化について
3. 学会等名 第63回トポロジーシンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 笠原泰
2. 発表標題 曲面の写像類群における単純閉曲線と線型性の視覚化について
3. 学会等名 研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」(招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Yasushi Kasahara
2. 発表標題 On simple closed curves and a visualization of the lincerity for mapping class group of surface
3. 学会等名 研究集会 "Topology and Geometry of Low-dimensional Manifolds" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考