

令和 2 年 4 月 29 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05155

研究課題名(和文)自由群の自己同型群のねじれ係数高次元コホモロジーの研究

研究課題名(英文)Studies of higher twisted cohomology groups of automorphism groups of free groups

研究代表者

佐藤 隆夫 (Sato, Takao)

東京理科大学・理学部第二部数学科・准教授

研究者番号：70533256

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究で得られた成果は大きく分けて3つある。1つ目は、階数3の自由群のIA自己同型群の2次元ホモロジー群に関してGL表現論的解釈を行い、新たな既約成分を見つけたこと、並びに1次元のコホモロジー群の3重カップ積の像が自明であることが分かったことである。2つ目は、次数が3の場合にAndreadakis予想が肯定的に解決できたことである。3つ目は、自由群のIA自己同型群の、非自明なねじれ係数非安定コホモロジー類をいくつか構成できたことであり、現在この研究を継続・進展させている最中である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

近年、自由群の自己同型群のコホモロジーの研究に関しては、非安定域に大きな研究の関心が集まっており、階数3の場合のIA自己同型群のホモロジーの新しいGL既約表現や、自由群の自己同型群の非安定2次元コホモロジー類の構成などは、最近の最先端の研究情勢から鑑みても相応のインパクトがあるものと確信している。

また、Andreadakis予想は50年以上も未解決問題であり、一部分とはいえその解決に寄与できたことは、一般の場合の解決に向けた一つの足掛かりを与えたことでもあり、大変有意義であると考えている。

研究成果の概要(英文)：We obtained three main results. The first one is that we found a new GL-irreducible component in the second homology group of the IA-automorphism group of the free group of rank 3. The second one is that we gave the affirmative answer to the Andreadakis problem in the degree three case. The third one is that we obtained non-trivial unstable twisted second cohomology classes of automorphism groups of free groups by using Kawazumi's 1-cocycles.

研究分野：代数的位相幾何学

キーワード：自由群の自己同型群 群のコホモロジー 非安定コホモロジー Andreadakis予想

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

自由群の自己同型群は曲面の写像類群とともに、20世紀初頭ごろから多くの研究者によって精力的に研究され、特に近年ではホモロジー論もしくはその関連分野が目覚ましい発展を遂げている。自由群のアーベル化に自明に作用するような自己同型たちのなす、自由群の自己同型群の正規部分群を IA 自己同型群といい、曲面の写像類群の Torelli 部分群に対応するもので、自由群の自己同型群の様々な研究において重要な役割を果たす。

IA 自己同型群に関しては現在でも解明されていないことが多く、例えば有限表示可能かどうかという問題や、有理安定コホモロジー群の構造ですら未解明である。本研究開始当初においては、IA 自己同型群の降中心列に付随する Johnson 準同型写像の有理余核を安定的に決定されていたものの、重要な未解決問題である Andreadakis 予想もほぼ手付かずの状態であった。

2. 研究の目的

IA 自己同型群の整係数 (コ) ホモロジー群は、スペクトル系列を用いた議論により、自由群の自己同型群のねじれ係数 (コ) ホモロジー群と密接な関係がある。そこで、組み合わせ群論やホモロジー代数、位相幾何などの手法を用いて、IA 自己同型群の高次元 (コ) ホモロジー群の構造を明らかにするとともに、それと関連する自由群の自己同型群のねじれ係数 (コ) ホモロジー群の計算を行うことが主な本研究の研究目的である。

3. 研究の方法

IA 自己同型群の有理 1 次元コホモロジー群の、2 次元コホモロジー群におけるカップ積の構造は、Petrot により GL 既約分解も含めて完全に決定されている。そこで、有理 1 次元コホモロジー群の高次元のカップ積を考え、最高ウェイト理論などの表現論的手法により、IA 自己同型群の高次元のコホモロジー群における GL 既約表現を可能な限り発見する。さらに、その既約表現に対応する自由群の自己同型群のねじれ係数コホモロジーを、組み合わせ群論的な手法、もしくは Outer space の幾何を用いた手法などを駆使して計算する。

4. 研究成果

本研究により得られた研究成果は大きく分けて 3 つある。以下、項目ごとにまとめる。

(1) 階数 3 の自由群の IA 自己同型群の 2 次元ホモロジー群に関して新たな GL 既約成分を検出。

階数 3 の IA 自己同型群の構造は大変複雑であり、Krstic-McCool らの結果により、その 2 次元ホモロジー群は有限生成でないことが知られている。しかしながら、GL 加群としての構造は未だに良く分かっていない。

私は、IA 自己同型群の Magnus 生成系たちのなすいくつかの関係式に注目し、それらが 2 次元有理コホモロジー群でどのようなふるまいをするのかについて、組み合わせ群論と GL 表現論を用いて研究した。結果として、1 次元コホモロジー群のカップ積として表せない、新たな GL 既約成分を見つけることができた。さらに、組み合わせ群論的な手法により、1 次元の有理コホモロジー群の 3 重カップ積の像が自明であるという結果も得られた。この既約表現に対応する、自由群の自己同型群の 2 次元ねじれ係数コホモロジー群については目下計算中である。

近年、自由群の自己同型群のコホモロジーの研究に関しては、非安定域に大きな研究の関心が集まっており、相応のインパクトがあるものと確信している。

(2) 階数 3 以上の自由群の自己同型群について、Andreadakis 予想を次数が 3 の場合に肯定的に解決。

Andreadakis 予想とは、IA 自己同型群の降中心列が Andreadakis-Johnson フィルトレーションに一致するかどうかという問題で、Andreadakis によって一致することが予想されているものの、現在では非安定域では反例も与えられている。しかしながら、安定域では依然として 50 年以上も未解決な問題である。

本研究において、IA 自己同型群の 2 次元ホモロジー群の研究を行っていた関係で、Magnus 生成系の関係子たちの構造について深く調べており、これを応用することで、次数 3 部分の二つの部

分群が一致することを示すことができた。

Andreadakis 予想の完全解決にはまだ多くの道のりがあるが、一部分とはいえその解決に寄与できたことは大変満足している。

そもそも、非安定的には Andreadakis 予想は否定的に解決されることが知られており、その障害についてコホモロジー論的に解釈ができるのではないかという、本研究のテーマとも合致する問題を研究中である。

(3) 自由群の IA 自己同型群のねじれ係数非安定 2 次元コホモロジー類を検出。

自由群の自己同型群のねじれ係数コホモロジーに関しては、安定域に関する結果はいくつか知られていたものの、高次元非安定コホモロジーに関する計算は殆ど見当たらなかった。

そこで、河澄響矢によって構成された 1 コサイクルである Johnson 写像と、カップ積を用いて非安定 2 次元コホモロジー類をいくつか作り出し、その非自明性を示した。

現在は、より高次元のコホモロジー群における振る舞いを研究中である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Takao Satoh	4. 巻 22
2. 論文標題 The third subgroup of the Andreadakis-Johnson filtration of the automorphism group of a free group	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J. Group Theory	6. 最初と最後の頁 41-61
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計13件（うち招待講演 8件 / うち国際学会 5件）

1. 発表者名 Takao Satoh
2. 発表標題 On twisted cohomology groups of the automorphism groups of free groups
3. 学会等名 Joint meeting of the Italian Mathematical Union, the Italian Society of Industrial and Applied Mathematics, the Polish Mathematical Society（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takao Satoh
2. 発表標題 On the Andreadakis conjecture of the automorphism groups of free groups
3. 学会等名 京都大学数理解析研究所研究集会・変換群論における幾何・代数・組み合わせ論（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takao Satoh
2. 発表標題 On some representations of the automorphism groups of free groups
3. 学会等名 Workshop on Geometric Discrete Mathematics II（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takao Satoh
2. 発表標題 On the Andreadakis conjecture of the automorphism groups of free groups
3. 学会等名 京都大学大学院理学研究科数学教室代数トポロジーセミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takao Satoh
2. 発表標題 On the Andreadakis conjecture of the automorphism groups of free groups
3. 学会等名 Colloquium talk at the Faculty of Mathematics and Computer Sciences, Adam Mickiewicz University (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takao Satoh
2. 発表標題 On the Andreadakis conjecture of the automorphism groups of free groups
3. 学会等名 Algebraic Topology seminar, The University of Strasbourg (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takao Satoh
2. 発表標題 On the Andreadakis conjecture of the automorphism groups of free groups
3. 学会等名 Topology of Arrangements and Representation stability, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takao Satoh
2. 発表標題 On the Andreadakis conjecture of the automorphism groups of free groups
3. 学会等名 Representation spaces, Teichmüller theory, and their relationship with 3-manifolds from the classical and quantum viewpoints, Universite d'Aix-Marseille (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takao Satoh
2. 発表標題 On the Andreadakis conjecture of the automorphism groups of free groups
3. 学会等名 Colloquium, The University of Gottingen (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 佐藤 隆夫
2. 発表標題 On the cohomology groups of the IA-automorphism groups of free groups of rank three
3. 学会等名 表現論による諸問題への新しいアプローチを目指して (第3回)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 佐藤 隆夫
2. 発表標題 On the cohomology groups of the IA-automorphism groups of free groups of rank three
3. 学会等名 変換群論シンポジウム2016
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 佐藤 隆夫
2. 発表標題 On the cohomology groups of the IA-automorphism groups of free groups of rank three
3. 学会等名 群作用と位相
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 佐藤 隆夫
2. 発表標題 On the cohomology groups of the IA-automorphism groups of free groups of rank three
3. 学会等名 有限群のコホモロジーとその周辺
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----