

令和 6 年 5 月 4 日現在

機関番号：34406
研究種目：基盤研究(C) (一般)
研究期間：2016～2023
課題番号：16K05162
研究課題名(和文) 局所変形を用いた結び目の研究

研究課題名(英文) Study of knots using local moves

研究代表者

塚本 達也 (Tsukamoto, Tatsuya)

大阪工業大学・工学部・教授

研究者番号：10350480

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的は結び目図式を局所的に変化させる局所変形を用いて、結び目全体の構造の解明や個々の結び目の位相的性質を把握することである。本研究では、単純リボン融合という変形とプレッツェル結び目と呼ばれる結び目の研究に注力し、成果を得た。結び目の位相型に対して定まる値を不変量というが、計算することは簡単ではない。さらに、変形の前後での変化量はさらに求めることが困難である。そのような中で本研究では、アレキサンダー多項式という不変量に対し、単純リボン融合による変化量と、可約性という性質を持つプレッツェル結び目の値を求めることに成功した。さらにこれらを用いて様々な結果を得ることで結び目理論を進展させた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

研究対象である結び目は3次元多様体や整数論といった数学の分野だけではなく、DNA研究のような数学外の分野とも深く関連している。実際、特に注力している局所変形の研究は組み換え酵素によるDNAへの作用に対応している。そのような中、本研究では単純リボン融合でほどける結び目のアレキサンダー多項式や、可約性をもつプレッツェル結び目のアレキサンダー多項式を求めた。さらにスライス・リボン予想という結び目理論における大きな予想の1つに対し、部分解を与えた。

研究成果の概要(英文)：The purpose of this research is to know the structure of the set of whole knots in the 3-space and the topological property of each knot by using local moves. In the term of research (2016-2023), we worked on simple-ribbon fusions and pretzel knots and obtained several results. In general, it is hard to calculate the value of knot invariants and difference between the before and after knots when we apply local moves. However, we calculated the difference of Alexander polynomials for the case of simple-ribbon fusions, and the values of Alexander polynomial of pretzel knots whose parameter sequences are erasable. Moreover, using the results, we determined simple-ribbon knots whose crossing number is less than equal to ten, and simple-ribbon knots which are odd stranded even pretzel.

研究分野：低次元トポロジー

キーワード：結び目理論

1. 研究開始当初の背景

結び目理論において、結び目全体の構造の解明や個々の結び目の位相的性質の把握は本質的課題である。結び目図式を局所的に変化させる局所変形を用いてこれらの課題に取り組んでいる。私はリボン結び目を局所変形の観点から研究すべく、東京女子大の小林一章氏、大阪工業大の渋谷哲夫氏と共に単純リボン変形を導入した。さらにこの変形によってリボン結び目を中心に一般の結び目の位相的性質や不変量の変化を研究してきた。本研究開始の少し前には単純リボン変形をさらに拡張し、単純リボン融合を導入した。結果として、単純リボン変形と同様、単純リボン融合も、結び目の種数や素性、さらにはアレキサンダー多項式といった多項式不変量とも深い関わりがあることが分かった。本研究開始直前にはゴードンによるリボン・コンコーダンスが結び目の半順序を与えるという予想を、単純リボン融合の場合に解決した。

2. 研究の目的

単純リボン変形を一般化した単純リボン融合と結び目や結び目の不変量との関連を把握する。さらに、得られた結果の一般の絡み目への拡張も試みる。特に、単純リボン融合によるアレキサンダー多項式の変化量を求めること、交点数 10 以下のリボン結び目について単純リボン結び目か否かの判定を実現する。さらにこれらの研究結果を特定の類を持つ結び目に対して適用し、それらの結び目が単純リボンであるか否かの判定を行う。研究期間においてはまず、プレッツェル型と呼ばれる結び目を扱う。これは N 個の 0 でない整数によって定まる結び目で、非常によく研究されている結び目の類である。しかしながら分かっていないことも多く、研究対象として申し分ない。

3. 研究の方法

幾何トポロジー的アプローチと代数的アプローチの双方を用いる。前者については、結び目の張るザイフェルト曲面と単純リボン融合の張る(はめ込まれた)曲面の交差の解析を考えている。これは前述の単純リボン融合が結び目の半順序を与えるという結果を示すのに用いたもので、本研究でも有効である。後者については (Levine-Tristram) 符号数を考えている。

4. 研究成果

本研究では研究期間を通して、単純リボン融合とプレッツェル結び目の研究に注力し、成果を得た。結果として、期間内に 8 編の論文を発表した。以下 4 つの主要結果について述べる。

リボン融合は結び目理論において重要な類であるリボン結び目・絡み目を生成する変形で、単純リボン融合はその特殊な場合であるが、全てではないものの非常に多くのリボン結び目・絡み目を生成することができる。リボン融合を幾何トポロジー的に扱う場合、円盤とバンドからなるはめ込まれた曲面を扱うが、一般に円盤はバンドとの交差を複数持つ。このことが扱いを非常に困難にする。そこでどの円盤(バンド)も 1 つのバンド(円盤)と 1 回だけ交わるという制限を加えたものが単純リボン融合である。

- (1) 単純リボン融合による結び目のアレキサンダー多項式の変化量を求めた。これまで特殊な場合については得られていたものの一般の場合は無理だろうと思われていたが、計算に適した形への自然な変形を発見し成し遂げることができた。これによって交点数 10 以下のリボン結び目について、単純リボン結び目を決定した。ここで、自明な結び目から単純リボン融合で得られる結び目を、単純リボン結び目という。この結果は同じ大阪工業大学の岸本健吾氏、渋谷氏、石川恒男氏との共同研究である。
- (2) 可約なパラメータ列を持つプレッツェル結び目のアレキサンダー多項式を求めることができた。プレッツェル結び目は大きく分けて偶数本偶数型、奇数本偶数型と奇数型の 3 種に分かれる。 ± 1 のパラメータを持たない奇数本偶数型のプレッツェル結び目については、Lecuona によりいくつかの例外を除いて、スライスならば可約なパラメータ列を持つことが示されている。ここでリボン結び目はスライスである。また、ここではさらに、型に依らずスライスである必要十分条件は本質的に強可約であると予想されている。ちなみに十分条件であることは容易に分かる。

そこで私は渋谷氏、石川氏、神戸薬科大学の内田吉昭氏とともに、Lecuona の結果を用いて、 ± 1 のパラメータを持たない奇数本偶数型のプレッツェル結び目について、単純リボン結び目を決定した。この結果は上記の可約やパラメータ列を持つプレッツェル結び目のアレキサンダー多項式と (1) で求めた単純リボン結び目のアレキサンダー多項式の双方が得られたことで実現した。ちなみに当該論文では、 ± 1 のパラメータを持たず、(弱)可約なパラメータ列を持つという条件下ではあるが、上記の3つの型いずれの場合においても、以下が同値であることを示した。

- ・単純リボン結び目であること
- ・アレキサンダー多項式が単純リボン結び目のもの(単純リボン型)と同じであること
- ・パラメータ列が本質的に強可約であり、奇数パラメータの値が ± 3 であること

ところで上記でも触れたが、リボン結び目はスライスである。この逆も成り立つというのがスライス・リボン予想であり、結び目理論において大きな問題の1つである。本研究期間では、これまで培った知見を活かし、プレッツェル結び目・絡み目のスライス性についても研究を行った。

- (3) 岸本氏、渋谷氏と共に、交代プレッツェル結び目について、スライス・リボン予想が成り立つことを示した。ここでは Lee や Traczyk による符号数の公式を用いたが、当該論文ではこれら2つの公式が同値であることも示した。
- (4) そして2023年度においては Lecuona の結果を絡み目に拡張し、2成分プレッツェル絡み目がスライスであるならば、型に依らず、そのパラメータ列は本質的に可約であることを示した。これは神戸大学の中西康剛氏と渋谷氏との共同研究である。一般にスライスでないことを示すのは非常に困難であるが、Miller の結果を用いて、可約であるがスライスでない奇数型プレッツェル結び目を無限個構成した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 K.Kishimoto, T.Shibuya, T.Tsukamoto, T.Ishikawa	4. 巻 58
2. 論文標題 Alexander polynomials of simple-ribbon knots	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 41-57
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 K.Kishimoto, T.Shibuya, T.Tsukamoto	4. 巻 37
2. 論文標題 Simple-ribbon concordance of knots	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Kobe Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1-17
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 K.Kishimoto, T.Shibuya, T.Tsukamoto	4. 巻 282
2. 論文標題 Sliceness of alternating pretzel knots and links	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Topology Appl.	6. 最初と最後の頁 107317
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2020.107317	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T.Shibuya, T.Tsukamoto	4. 巻 65
2. 論文標題 Simple-ribbon fusions and primeness of links	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mem. Osaka Inst. Tech.	6. 最初と最後の頁 43-50
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kengo Kishimoto, Tetsuo Shibuya, and Tatsuya Tsukamoto	4. 巻 27
2. 論文標題 Simple-ribbon fusions and primeness of knots	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Knot Theory and Its Ramifications	6. 最初と最後の頁 1850057-1, 11
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0218216518500578	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tetsuo Shibuya and Tatsuya Tsukamoto	4. 巻 63
2. 論文標題 A note on the slice-ribbon conjecture and simple-ribbon fusions	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Memoirs of Osaka Institute of Technology	6. 最初と最後の頁 7, 13
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計7件 (うち招待講演 3件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 塚本 達也
2. 発表標題 Characterizations of pretzel knots which are simple-ribbon
3. 学会等名 拡大K00Kセミナー-2022
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 塚本 達也
2. 発表標題 On Pretzel knots which are simple-ribbon
3. 学会等名 東京女子大学トポロジーセミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 塚本 達也
2. 発表標題 結び目の単純リボン変形について
3. 学会等名 第68回トポロジーシンポジウム(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 塚本 達也
2. 発表標題 On simple-ribbon fusions
3. 学会等名 研究集会「結び目理論」(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 塚本達也
2. 発表標題 Cobordism of pretzel knots and simple-ribbon fusions
3. 学会等名 拡大K00Kセミナー-2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tatsuya Tsukamoto
2. 発表標題 Alexander polynomials of Pretzel knots and simple-ribbon fusions
3. 学会等名 拡大K00Kセミナー-2018
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tatsuya Tsukamoto
2. 発表標題 Alexander polynomials of simple-ribbon knots
3. 学会等名 Knots in Washington XLIII (国際学会)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

http://www.oit.ac.jp/ge/~tsukamoto/

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Volume Conjecture in Tokyo	開催年 2018年～2018年
--------------------------------------	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------