

令和元年5月13日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05164

研究課題名(和文) 漸近的表現論の深化と展開

研究課題名(英文) Deepening and developing asymptotic representation theory

研究代表者

洞 彰人 (Hori, Akihito)

北海道大学・理学研究院・教授

研究者番号：10212200

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：無限個の文字の置換のような巨大な群の作用が内包する構造を解明するため、確率論の視点を導入して群の表現のもつ統計量としての性格に着目するのが、漸近的表現論の骨子となる考え方である。本研究では、群の表現の解析にしばしば現れるヤング図形と呼ばれる対象の統計集団の挙動を調べた。ヤング図形の集団における群論的な確率力学系に動的スケール極限を施し、大数の法則の効果によって生じる極限形状の巨視的な時間発展を考察した。このモデルの構築と性質の解明について、いくつかの成果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ネットワーク科学の急速な発展と相俟って、科学のさまざまな分野においてランダムな性格を有する大規模な系を取り扱う必要が生じているが、このような系の解析は多くの困難を伴う。一方、事物の対称性に着目して複雑な対象にアプローチする数学的手法として、古典的なフーリエ解析から発展した調和解析ないしは群の表現論の方法がある。本研究の大枠である漸近的表現論の基本的なアイデアは、ランダムネスを扱う確率論と対称性に立脚した表現論の融合である。この認識のもと、本研究では、具体的な確率統計モデルに即した研究を通して漸近的表現論の深化と展開を推進し、巨大なランダム系の研究の発展に資することを企図した。

研究成果の概要(英文)：The fundamental idea of asymptotic representation theory consists of focusing on the statistical feature of representations via the viewpoint of probability theory, which aims at understanding the structure of actions of big groups such as the infinite symmetric group. In this research project, we investigated behavior of statistical ensembles of Young diagrams which often appear in analysis of group representations. We introduced dynamical scaling limit into group-theoretical probabilistic motions in Young diagram ensembles and considered macroscopic time evolution of the limit shapes resulting from the effect of the law of large numbers. We obtained several results on the formulation and the properties for this model.

研究分野：関数解析

キーワード：漸近的表現論 ヤング図形 巨大な群 ランダムウォーク 自由確率論 分岐グラフ

1. 研究開始当初の背景

(1) 研究代表者は、群上のランダムウォークの臨界現象、量子確率論における群作用の役割の解明、対称性を有するグラフのスペクトル解析、帰納極限群とその双対的な対称(分岐グラフ)の上の調和解析等、群の表現論と確率論が交錯する場で数学の研究を行ってきた。巨大な群が内包する構造を調べるには、確率論的な観点が必要である。その最も重要な点は、有限の対象と無限の対象を繋いで特徴のある巨視的構造を浮かび上がらせるための洗練された枠組を与えるところにある。それは問題とする系に応じた適切な粗視化を施すことを意味し、定量的には何らかのパラメータに沿うスケール極限を計算することになる。本研究もそこを立脚点としていて、それが課題名の「漸近的表現論」に込めたニュアンスである。

(2) 対称群の列の帰納極限である無限対称群は、表現論的観点から見れば巨大な群の典型例であり、研究代表者もこの群にまつわる研究をこれまでいくつか行ってきた。一方、群の表現に関わる意味合いは含まれないが、ヤング図形の統計集団に対する流体力学極限等の確率論における研究が行われている。これらの仕事も、本研究の重要な背景であると認識している。

2. 研究の目的

(1) 本研究の柱になる対象は、おおむね次の2つの事項にまとめられる。

- ・ヤング図形の群論的な統計集団に対する動的モデルの構築と解析
- ・コンパクト群の増大族の帰納極限と分岐グラフおよびその(理想)境界上の調和解析

この両者は密接な関係にあるものの、粗視化のスケールの観点からすれば、全く異なる風景を眺めようとしていると言える。

(2) 表現論の観点から見れば、ヤング図形の集合上に定まる最も重要な測度がプランシェレル測度である。このプランシェレル集団においては、確率論の大数の法則の意味で、ヤング図形の特定の形状(ヴェルシック・ケロフ・ローガン・シェップの極限形状)が浮かび上がることがよく知られている。研究代表者は、プランシェレル測度を平衡状態にもつような確率力学系をヤング図形の集団の上に定め、拡散的な時空のスケール極限を考えることによって、巨視的なプロファイルが定める界面の時間発展を論じた結果を2015年に出版した。この結果を端緒とした進展をはかること、特に他の群論的な統計集団について考察すること、群の個性の反映を見極めること、自由確率論が現れる意味を考察すること等を漸近的表現論の枠組で研究することが、1つの主要な目的である。

(3) コンパクト群の増大族に対し、既約表現の制限と誘導の既約分解(分岐則)から分岐グラフが構成される。特に、対称群の増大列に付随するものがヤンググラフである。分岐グラフの彼方を見通してマルチン境界を考察する過程は、漸近的表現論の魅力と威力が十分に発揮される場である。一般論の立場からは、このマルチン境界は帰納極限群の有限型の因子表現の準同値類全体にほかならず、マルチン境界上での積分表示は、抽象的にはフォンノイマン環の因子環への直積分分解ないしは凸集合に対するジョケの積分定理に帰着される。本研究にとっては、これは出発点であり、このような重ね合せの確率測度の個性を具体的に記述する手段を開発することが、もう1つの大きな目的である。

3. 研究の方法

(1) 本研究は、研究代表者のこれまでの研究の足跡と成果に基づき、そこから新たな発展を目指すものである。したがって、研究代表者の個人としての研究活動が主要部分を占めることになる。本研究に研究分担者は置かない。しかし、過去の共同研究の経験からしても、学問的関心を同じくする研究者との学術交流をたいへん重視している。本研究の目的を達成するには、群の表現論と確率論の深いレベルでの実質的な融合が必要とされる。幅広い分野から必要に応じて多くの研究者の知恵を借りるため、本研究課題に関わる交流の機会を積極的に生かす。

(2) ヤング図形の群論的な統計集団における拡散的スケール極限について、研究代表者の得た結果を踏まえた上で、そこで明らかになったいくつかの研究方向および問題点を見据えて研究を進める。研究代表者がこれまで行ってきた漸近的表現論および自由確率論の手法を駆使した研究を一段と深めるほか、より解析的な方法の導入も考えに入れる。

(3) 帰納極限の形に表される巨大な群上の調和解析の理論の構築は、研究代表者が十数年来取り組んできた中長期的な課題である。この研究の一環として、確率論や表現論のいろいろなところから集めて利用してきた概念・手法を本研究課題の現状に即した形で統一的な観点からある程度整理するという作業を行う。その上で、具体的な問題としては、コンパクト群の環積の構造の個性を反映した分岐グラフ上で、調和関数論と確率論の極限定理を融合した調和解析の

展開を試みる。

4. 研究成果

(1) 無限対称群、無限環積群、無限ユニタリ群のような帰納極限群に代表される巨大な群は、表現論的なふるまいがワイルドであり、それらの群の作用が内包する構造はたいへん興味深い。確率論の視点を導入して群の表現のもつ統計量としての性格を浮かび上がらせるのが、漸近的表現論の骨子となる考え方である。このようにして、表現論のロジックや理論体系の漸近版モデルを構築し、さらなる深化と展開をはかるのが、本研究の目的であった。以下の面において、一定の目的は達せられた。

(2) ヤング図形の群論的な統計集団における解析学を展開するため、ヤング図形のスケール変換されたプロファイルの集中現象を組織的に研究した。これは大まかに言えば大数の法則の帰結であるが、プロファイルの空間の位相や収束の意味を厳密に検討して定式化し、表現の漸近挙動を引き出しやすく汎用性のある形に整理した。これにより、古典的なヴェルシク・ケロフ・ローガン・シェップの極限形状を含む多くの静的モデルがカバーされ、本研究の主眼である動的モデルの解析の礎を築くことができた。

(3) 研究期間中に継続して取り組んだのが、ヤング図形のコーナーセルのランダムで非局所的な移動によって生じる連続時刻のマルコフ連鎖の動的スケール極限のモデルである。これは対称群の既約表現の分岐則を背景にもつものであり、漸近的表現論の立場から見れば自然な対象である。微視的な時刻とヤング図形のセル数の間の適当なバランスのもとでの極限操作により、大数の法則の帰結として、スケール変換されたプロファイルの巨視的時間発展の問題が浮かび上がる。このモデルの構築と性質の解明について、いくつかの成果を得た。

極限プロファイルの時間発展の法則を推移測度の言葉で完全に特徴づけた。この際、非可換な構造を有する巨大なランダム系の考察にしばしば現れる自由確率論の概念・手法を有効に用いた。

対称関数論の道具を用いた証明手段の改良を行った。特に、対称群の既約指標の値とヤング図形の形状の関係を理解するため、ケロフ・オルシャンスキー代数の構造を研究した。

極限プロファイルを特徴づける諸量がしたがう偏微分方程式の考察を行った。

(4) 極限プロファイルのゆらぎの時間発展を考察した。このモデルの長時間極限の定常的なゆらぎはプランシェレル測度によって記述されるので、その性質はよく調べられている。一方、有限の巨視的時刻におけるゆらぎの性質は、ほとんどよくわかっていない。ヤング図形の形状と等価な情報を与えるケロフ・オルシャンスキー代数の生成元たちの共分散の構造の研究に着手できた。

(5) 無限対称群をはじめとする帰納極限群の分岐グラフ上の調和解析に関連し、マルチン境界の構成や調和関数の挙動についての結果を整理し、いくつかの知見を2017年出版の日本語の著書に盛り込んだ。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計1件)

洞 彰人, ヤング図形集団における極限形状とガウスゆらぎの動的モデル, 数理解析研究所講究録 2089, 査読無, 2018, 19-34

〔学会発表〕(計11件)

洞 彰人, ランダムヤング図形の極限形状の時間発展における微視的待ち時間分布の効果について, 2019 日本数学会年会, 東京工業大学, 2019

HORA Akihito, Dynamical limit shapes for random Young diagrams, 21th HU-SNU Joint Symposium, Hokkaido University, 2018

HORA Akihito, Effect of microscopic pausing time distribution on evolution of macroscopic profiles in Young diagram ensembles, Non-commutative probability and related fields, Hokkaido University, 2018

HORA Akihito, Dynamical scaling limit of the restriction-induction chain on Young diagrams in terms of free probability, Random Matrices and Their Applications, Kyoto University, 2018

HORA Akihito, Markov chains, graph spectra, and some static/dynamic scaling limits, 第3回代数的組合せ論「仙台勉強会」, 東北大学情報科学研究科, 2018

HORA Akihito, On evolution of macroscopic profiles (and their global fluctuations) for growing random Young diagrams, 第19回北東数学解析研究会, 北海道大学理学部, 2018

洞 彰人, 群論的なヤング図形集団における巨視的プロフィールとゆらぎの動的モデル, 筑波大学解析セミナー, 筑波大学, 2017

HORA Akihito, Dynamic model for limit profiles and their Gaussian fluctuations in Young diagram ensembles, Mathematical Aspects of Quantum Fields and Related Topics, RIMS Kyoto Univ., 2017

洞 彰人, On a dynamic model for limit profiles and their Gaussian fluctuations in group-theoretical ensembles of Young diagrams, Colloquium RIMS Kyoto Univ., 2017

HORA Akihito, Application of free probability to dynamical limit shapes of random Young diagrams, One-day workshop on Interface between Commutative and Non-Commutative Stochastic Analysis, Hokkaido University, 2017

洞 彰人, ヤング図形集団における大数の法則(静的および動的モデル), 岡山-広島解析・確率論セミナー, 岡山大学, 2017

〔図書〕(計2件)

洞 彰人, 対称群の表現とヤング図形集団の解析学--漸近的表現論への序説--, 数学の杜, 数学書房, 2017, 434

HORA Akihito, The Limit Shape Problem for Ensembles of Young Diagrams, Springer Briefs in Mathematical Physics 17, Springer, 2016, 73

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年:

国内外の別:

取得状況(計0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年:

国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名:

ローマ字氏名:

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号（8桁）：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。