様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年 １０ 月 ２５ 日現在

機関番号：８２７２３
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2022
課題番号：１６K０５１６６

研究課題名（和文）非有理的多様体上の超幾何型積分の研究

研究課題名（英文）Study on integrals of hypergeometric type on irrational varieties

研究代表者
渡辺　文彦（Watanabe, Humihiko）

防衛大学校（総合教育学群、人文社会科学群、応用科学群、電気情報学群及びシステム工学群）・総合教育学群・教授

研究者番号：２０２７４４３３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：研究成果は以下の通り．アーベル曲面上の正規交叉因子を除いた空間の基本群の基本関係式の決定の研究，アーベル曲面から因子を2つ除いた空間のツイストホモロジー類の構成の研究，アーベル曲面から正規交叉因子を除いた空間上の乗法的函数の臨界点と空間のオイラー数との関係の研究，K3曲面から32本の因子を除いた空間にアーベル曲面上の積分表示に関連した局所定数層を導入する研究，リーマン面上6点配置に関連した積分表示の接続問題の研究，リーマン面上点配置の積分に関連した交叉形式に付随するコンパクト台コホモロジー群の構造解析の研究，以上である．

研究成果の学術的意義や社会的意義
超幾何積分とは，複素射影空間（有理多様体）上の超平面配置の幾何に関連して定義される．この考え方を非有理多様体上の因子配置の幾何に延長した場合，どのような新たな知見が得られるかに興味がある．得られた研究結果は，アーベル曲面や高種数リーマン面において，超幾何積分に類似した新型の積分を定義するための幾何学的な基礎的な結果となるものである．新型の積分とは，ただ新しいということだけでなく，今までにない新しい構造を備えている可能性のあるものである．これは，函数の研究を主体とする解析学をさらに豊かにするだけではなく，数理科学（含む応用科学）の新現象を数理的に記述する際，役立つことが期待される．

研究成果の概要（英文）：During the research period, we studied the following subjects: study on the structure of the fundamental group of abelian surface minus normal crossing theta divisors; study on construction of 2-homology classes of abelian surface minus 2 theta divisors with coefficients in locally constant sheaf; study on counting the number of critical points of a multiplicative function associated with normal crossing theta divisors (this number coincides with the euler number); study on introduction of locally constant sheaf over K3 surface minus 32 divisors which is related to an integral representation on abelian surface minus 16 theta divisors defined by theta functions with half-integer character; study on connection problem of integral representations defined on a Riemann surface of genus 2 minus 6 points; study on cohomology with compact support appearing the intersection form associated with an integral representation defined on a Riemann surface.

研究分野：解析学

キーワード：アーベル曲面　テータ因子　リーマン面　ツイストコホモロジー　超幾何積分

１．研究開始当初の背景

Wirtinger 積分 (Wirtinger, 1902) を利用して，ガウスの超幾何函数の接続問題，モノドロミー問題，微分方程式など，超幾何函数をめぐる一連の理論をテータ函数論やモジュラー変換の観点で再構築した (Watanabe, 2007, 2009, 2014)．Wirtinger 積分は非有理多様体上の因子配置の幾何と密接に関係しており，これに関連し結果をいくつか得た．リーマン面上の点配置の幾何については Mano-Watanabe, Proc. Amer. Math. Soc., 140 (11) (2012), 3867-3881 および Watanabe, Kumamoto J. Math., Vol. 29 (2016), 55-63 がある．また，アーベル曲面上のテータ因子配置の幾何に関しては，Watanabe, Internat. J. Math., 27 (2016), no. 6, 1650049, 41 pp がある．

２．研究の目的

(1) Wirtinger 積分の高種数リーマン面上への一般化を構成し，解析的性質を調べる．
(2) アーベル曲面からテータ因子を除いた空間 M の基本群や 2 ツイストホモロジー群の構造を調べる．また，ツイストサイクルのモース理論的構成法に関連し，M 上の乗法的函数の定義するモース函数の臨界点とオイラー数との関連を調べる．
(3) 因子配置の幾何では交叉理論が重要である．リーマン面上の点配置の場合で，コンパクト台コホモロジーの構造を調べる．
(4) アーベル曲面上の積分を Kummer 曲面に落としたものが，オイラー積分表示の 2 次元版のように思える．このための予備的研究を行う．

３．研究の方法

(1) Wirtinger 積分のひとつの一般化として，種数 2 のリーマン面の Weierstrass 点 6 点で分岐する乗法的函数を構成する．リーマン面の超楕円対合を利用し，積分路を構成または変形することで接続問題を解く．
(2) M の基本群の研究では，アーベル曲面 X をテータ因子の管状近傍 $\tilde{D}$ とその補集合 U に分解し，ファン・カンペンの定理を適用して M の基本群の基本関係式を求める．この際，$V = \tilde{D} \cap U$ の基本群の情報が必要であり，HNN 拡大と呼ばれる技法をもちいて V の基本群の構造を決定する．

M の 2 ツイストホモロジー類の構成では，テータ因子が八角形展開されるように X を超立方体展開することで構成する．この展開からツイストホモロジー類を眺めることで，様々なツイストホモロジー類の間の関係式が得られる．

乗法的函数の臨界点の研究では，臨界点全体の集合を，乗法的函数の対数微分と対数的ベクトル場の積で生成されるイデアル層で構造層を割った商層の台に翻訳し，コホモロジーに付随するスペクトル系列の議論を応用して，臨界点の個数をオイラー数と関連させる．
(3) リーマン面上のコンパクト台のコホモロジーは，ド・ラーム複体に Verdier 双対性を適用し Esnault-Viehweg の理論を応用することで，コンパクト台コホモロジーを定義する二重複体が得られる．ハイパーコホモロジーに付随するスペクトル系列の値を決定することでコンパクト台のコホモロジーの構造を決定する．
(4) 0 または $\frac{1}{2}$ に値をとるパラメータを 4 つもつテータ因子計 16 個の配置をアーベル曲面 X 上で考える．X を対合で割り，単純特異点 16 点を解消すれば Kummer 曲面 S を得る．S 上には，テータ因子に由来する 16 個の因子と，例外曲線に由来する 16 個の因子，計 32 個の因子が存在し，これらは自己交点数 -2 の有理曲線である．アーベル曲面上 16 個のテータ因子で分岐する乗法的函数で定義される局所定数層を，Kummer 曲面から 32 個の因子を除外した空間に局所定数層として誘導することができる．この定数層を係数とするコホモロジーを調べるための予備的考察をおこなう．

４．研究成果

(1) テータ因子の補集合の基本群（この内容の詳細は，「第 56 回実函数論・函数解析学合同シンポジウム講演集」55 頁に掲載）

3 以上の整数 n を固定する．$D_1, \cdots, D_n$ は X の相異なるテータ因子であって正規交叉であるとする．整数 κ $(1 \leq \kappa \leq n)$ に対し $D^{(\kappa)} = D_1 \cup \cdots \cup D_\kappa$ と置く．D_κ, $D^{(\kappa)}$ の X における管状近傍（各ファイバーは閉円板）をそれぞれ $\tilde{D_\kappa}$, $\tilde{D^{(\kappa)}}$ とする．U_κ は $X - \tilde{D^{(\kappa)}}$ の閉包とする．このとき U_κ は $X - D^{(\kappa)}$ にホモトピー同値である．$\kappa \neq \kappa'$ に対し D_κ と $D_{\kappa'}$ の交点（計 2 つ）を $p_{\kappa\kappa'}$, $p_{\kappa'\kappa}$ とする．$\overset{\circ}{D_1} = D_1$ とおく．整数 κ $(2 \leq \kappa \leq n)$ に対し $\overset{\circ}{D_\kappa}$ は D_κ から $2\kappa - 2$ 個の交点 $D_\kappa \cap D^{(\kappa-1)}$ を抜いたものとする．$\overset{\circ}{D_\kappa}$ は D_κ から $2\kappa - 2$ 点 $p_{1\kappa}, p_{\kappa 1}, p_{2\kappa}, p_{\kappa 2}, \cdots, p_{\kappa-1,\kappa}, p_{\kappa,\kappa-1}$ を除外している．$D = \cup_{\kappa=1}^{n} \overset{\circ}{D_\kappa}$ が成り立つ．$\Delta_{\kappa\kappa'}^{\kappa}$, $\Delta_{\kappa'\kappa}^{\kappa}$ $(\kappa' \neq \kappa)$ は点

$p_{\kappa\kappa'}$ または $p_{\kappa'\kappa}$ を中心とする D_κ 上の微小閉円板とする．$\Sigma^\kappa_{\kappa\kappa'} = \partial\Delta^\kappa_{\kappa\kappa'}$ などと置く．これは円周に同相．D'_κ を $D_\kappa - \Delta^\kappa_{1\kappa} - \Delta^\kappa_{\kappa 1} - \Delta^\kappa_{2\kappa} - \Delta^\kappa_{\kappa 2} - \cdots - \Delta^\kappa_{\kappa-1,\kappa} - \Delta^\kappa_{\kappa,\kappa-1}$ の D_κ における閉包とする．D'_κ は $\mathring{D}_\kappa$ にホモトピー同値．$\tilde{D'_\kappa}$ を D'_κ の X における管状近傍とする．このとき $\tilde{D'_\kappa} = \tilde{D_\kappa} \cap U_{\kappa-1}$ である．$\kappa \neq \kappa'$ のとき補助点 $*_{\kappa\kappa'} \in \Sigma^\kappa_{\kappa\kappa'} \times \Sigma^{\kappa'}_{\kappa\kappa'} \subset \partial \tilde{D^{(n)}}$ を $p_{\kappa\kappa'}$ の近くにとる．点 $*_{1\kappa}$ から $\Sigma^\kappa_{1\kappa} (\subset D'_\kappa)$ 上の 1 点に移動しさらに D'_κ 上を移動して $\Sigma^\kappa_{\kappa\kappa'}$ または $\Sigma^\kappa_{\kappa'\kappa}$ $(\kappa' < \kappa)$ 上の 1 点に達し $\Sigma^\kappa_{\kappa\kappa'}$ または $\Sigma^\kappa_{\kappa'\kappa}$ を D_κ の向き付けに関し正の向きに 1 回転した後，いま来た道を逆にたどり点 $*_{1\kappa}$ に戻る道を $\gamma^\kappa_{\kappa\kappa'}$ または $\gamma^\kappa_{\kappa'\kappa}$ と書く．

定理　n は 2 以上の整数とする．$*_{1n}$ を基点とする基本群 $\pi_1(U_n, *_{1n})$ は $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \gamma^2_{12}, \gamma^1_{12}, \cdots, \gamma^1_{1n}$ で生成され，$\gamma^2_{12}, \gamma^1_{12}, \cdots, \gamma^1_{1n}$ は互いに可換であり，次の基本関係

$$\begin{aligned}
&[\lambda_3, \lambda_1] = (\gamma^2_{12})^{-1}\gamma^1_{12}\cdots\gamma^1_{1n},\\
&[\lambda_4, \lambda_2] = (\gamma^1_{1n})^{-1}\cdots(\gamma^1_{12})^{-1}\gamma^2_{12},\\
&[\lambda_\mu, \lambda_\nu] = 1 \quad ((\mu,\nu) \neq (1,3),(2,4),(3,1),(4,2)),
\end{aligned}$$

$$[\gamma^2_{12}, \gamma^1_{1\kappa}] = [\gamma^2_{12}, \lambda_\mu] = [\gamma^1_{1\kappa}, \lambda_\mu] = 1$$
$$(\kappa = 2, \cdots, n,\ \mu = 1,2,3,4)$$

が成り立つ．

(2) 2 次元複素トーラス上のツイストホモロジー類の構成について ($n = 2$ の場合に限定)（この内容の詳細は,「2 次元複素トーラス上のツイストホモロジー類の構成について（改訂版）」（令和元年 11 月）を参照）

$X = \boldsymbol{C}^2/(\boldsymbol{Z}^2 + \tau\boldsymbol{Z}^2)$ と置き，X は主偏極アーベル曲面とする．ただし $\tau = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix}$, ${}^t\tau = \tau$, $\mathrm{Im}\,\tau > 0$ とする．$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_3 = \begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{21} \end{pmatrix}$, $\lambda_4 = \begin{pmatrix} \tau_{12} \\ \tau_{22} \end{pmatrix}$ と置く．$z = (z_1, z_2)$ とする．$f(z)$ は X 上有理型な乗法的函数とする．$i = 1, 2$ に対し $c_i \in \boldsymbol{C} - \boldsymbol{Z}$ は $c_1 + c_2 = 0$ をみたすとし，$T(z) = \theta_1(z)^{c_1}\theta_2(z)^{c_2}f(z)$ と置く．ただし $\theta_i(z)$ はテータ函数．このとき $T(z + \lambda_k) = \varepsilon_k T(z)$ が成り立つ．ただし ε_k は相異なる複素数であって $\varepsilon_k \neq 0, 1$ であるもの．D_i は $\theta_i(z)$ に付随するテータ因子とし，$M = X - (D_1 \cup D_2)$ と置く．$\check{\mathcal{L}} = \boldsymbol{C} \cdot T(z)$ を M 上の局所定数層とする．明らかに，$H_0(M, \check{\mathcal{L}}) = H_1(M, \check{\mathcal{L}}) = H_3(M, \check{\mathcal{L}}) = H_4(M, \check{\mathcal{L}}) = 0$ であるので，$\dim H_2(M, \check{\mathcal{L}}) = \chi(M) = 6$ である．以下もっぱら 2 ホモロジー類の構成を考えればよい．基点 $\bullet \in M$ を固定する．$\lambda_k \in C_1(M, \check{\mathcal{L}})$ とみなしたとき，$\partial\lambda_k = (\varepsilon_k - 1)\bullet$ である．このとき次を得た．

定理　$Z_2(M, \check{\mathcal{L}})$ の元，Γ, Γ_{12}, Γ_{23}, Γ_{34}, Γ_{41}, $\widetilde{\Delta(h_+)}$, $\widetilde{\Delta(h_-)}$, $\widetilde{\Delta(k_+)}$, $\widetilde{\Delta(k_-)}$, $C^{12}_2 - C^{12}_4$, $C^{12}_1 - C^{12}_3$, $C_{12} - C_{14}$, $C_{21} - C_{23}$, $C_{32} - C_{34}$, $C_{41} - C_{43}$ は全て，$B_2(M, \check{\mathcal{L}})$ の元の違いを除き，$\widetilde{\Delta(h)}$, $\widetilde{\Delta(h_1)}$, $\widetilde{\Delta(h_3)}$, $\widetilde{\Delta(k)}$, $\widetilde{\Delta(k_2)}$, $\widetilde{\Delta(k_4)}$ の一次結合となる．

ここで，定理に現れるサイクルの定義は紙数が限られているため詳細は省略するが，Γ 型のものは X の整係数 2 サイクルを用いて構成されるもの，$C - C$ 型のものは境界がテータ因子の 1 サイクルの和であるような局所有限ツイストサイクルの正則化であるもの，Δ 型のものは境界にテータ因子の 1 サイクルを含まない局所有限ツイストサイクルの正則化であるものである．なお，以下の予想が残る．

予想　6 つの元 $\widetilde{\Delta(h)}$, $\widetilde{\Delta(h_1)}$, $\widetilde{\Delta(h_3)}$, $\widetilde{\Delta(k)}$, $\widetilde{\Delta(k_2)}$, $\widetilde{\Delta(k_4)}$ は，$H_2(M, \check{\mathcal{L}})$ の基底を定義するか．

このためには，6 つの元の交点数が計算され交点行列が可逆であることが分かればよいと思う．

(3) 種数 2 の Riemann 面上の積分表示に関する 1 次関係式について（この内容の詳細は，水谷・渡辺，防衛大学校理工学研究報告第 58 巻第 1 号 23-30 に掲載）

X を種数 2 のコンパクト Riemann 面とする. X は超楕円的であるので, X 上のある 1 点で位数 2 の極をもち, その他で正則な函数 z が存在する. z は X から $\mathbb{CP}^1$ への 2 重被覆を定義し, Riemann-Hurwitz の公式により丁度 6 つの分岐点 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ が存在する. このうちの 1 つが z の位数 2 の極と一致する. 一般性を失うことなく $z(P_1) = 0,\ z(P_2) = 1,\ z(P_6) = \infty$ としてよい. $k = 3, 4, 5$ に対し $z(P_k) = e_{k-2},\ e_i \neq e_j\ (i \neq j)$ とおく. 方程式 $w^2 = z(z-1)(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)$ で定義される函数 w は X 上 1 価有理型函数である. X 上の超楕円対合 $J : X \to X$ を $(z, w) \overset{J}{\mapsto} (z, -w)$ と定める. $J^2 = 1$ をみたし, J は 6 点 P_k を固定する. X 上の正則 1 形式 η に対し, J の作用を $J\eta = \eta \circ J^{-1} (= \eta \circ J)$ で定義する. これは, $\eta = \varphi(z)dz$ と書けているとき $J\eta = \varphi(Jz)d(Jz)$ の意味である. 正則 1 形式に対して

$J\eta = -\eta$ であることが J の定義からただちに導かれる．X は種数 2 であるので，同型 $H_1(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^4$ が成り立つ．$H_1(X,\mathbb{Z})$ の標準基底 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ は交叉の条件 $\lambda_1 \cdot \lambda_3 = \lambda_2 \cdot \lambda_4 = 1,\ \lambda_i \cdot \lambda_j = 0\ \ (|i-j| \neq 2)$ をみたすものとして定められる．この基底に対応する 1 次独立な X 上正則な 1 形式を ζ_1, ζ_2 とする．すなわち $1 \leq i,j \leq 2$ に対し $\int_{\lambda_i} \zeta_j = \delta_{ij}$ とする．$\tau_{ij} = \int_{\lambda_{i+2}} \zeta_j$ とおけば 2 次正方行列 $\tau = (\tau_{ij})$ は 2 次 Siegel 上半空間 $\mathcal{H}_2 = \{\tau |{}^t\tau = \tau, \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ 上の元を定める．以下 $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ とおく．Abel-Jacobi 写像 $\varphi : X \to \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^2 + \tau\mathbb{Z}^2$ を，点 P_1 を基点として $\varphi(P) := \int_{P_1}^{P} \zeta$ と定める．2 変数テータ函数 $\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z;\tau)$ は Farkas-Kra, Riemann surface, Springer で導入されたものとする．$\vartheta \begin{bmatrix} a_1\, a_2 \\ b_1\, b_2 \end{bmatrix} (\varphi(P);\tau)$ を $\begin{Bmatrix} a_1\, a_2 \\ b_1\, b_2 \end{Bmatrix}$ と略記する．$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ は相異なる複素数とし，条件

$$\mathrm{Re}(\alpha),\ \mathrm{Re}(\beta),\ \mathrm{Re}(\gamma),\ \mathrm{Re}(\delta),\ \mathrm{Re}(\epsilon) > -\frac{1}{4}, \tag{a}$$

$$\mathrm{Re}(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\epsilon) < \frac{1}{4}, \tag{b}$$

$$4\alpha,\ 4\beta,\ 4\gamma,\ 4\delta,\ 4\epsilon,\ 4(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\epsilon) \notin \mathbb{Q} \tag{c}$$

をみたすものとする．X 上の乗法的函数 $T(P)$ を

$$\begin{aligned} T(P) := & \begin{Bmatrix} 0\,0 \\ 0\,0 \end{Bmatrix}^{\gamma+\epsilon} \begin{Bmatrix} 0\,1 \\ 0\,0 \end{Bmatrix}^{\delta+\epsilon} \begin{Bmatrix} 0\,0 \\ 1\,0 \end{Bmatrix}^{\beta+\delta} \begin{Bmatrix} 0\,0 \\ 0\,1 \end{Bmatrix}^{\gamma+\delta} \begin{Bmatrix} 0\,1 \\ 1\,0 \end{Bmatrix}^{\beta+\gamma} \\ & \times \begin{Bmatrix} 0\,0 \\ 1\,1 \end{Bmatrix}^{\beta+\epsilon} \begin{Bmatrix} 1\,0 \\ 1\,0 \end{Bmatrix}^{\alpha+\delta} \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 0\,1 \end{Bmatrix}^{\alpha+\beta} \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1\,0 \end{Bmatrix}^{\alpha+\gamma} \begin{Bmatrix} 1\,0 \\ 1\,1 \end{Bmatrix}^{\alpha+\epsilon} \\ & \times \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1\,1 \end{Bmatrix}^{-(\alpha+\gamma+\delta+\epsilon)} \begin{Bmatrix} 0\,1 \\ 1\,1 \end{Bmatrix}^{-(\beta+\gamma+\delta+\epsilon)} \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 0\,0 \end{Bmatrix}^{-(\alpha+\beta+\delta+\epsilon)} \\ & \times \begin{Bmatrix} 1\,0 \\ 0\,1 \end{Bmatrix}^{-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)} \begin{Bmatrix} 1\,0 \\ 0\,0 \end{Bmatrix}^{-(\alpha+\beta+\gamma+\epsilon)} \end{aligned}$$

と定義する．

定義　X 上正則な 1 形式 $dm(P) \neq 0$ を任意にとり固定する．広義積分

$$I_{kl} = \int_{P_k}^{P_l} T(P)dm(P) \quad (k,l = 1,\cdots,6,\ k \neq l)$$

を種数 2 の**超幾何型積分**と呼ぶ．

条件 (a), (b) より広義積分 I_{kl} は収束する．$T(P)$ および $dm(P)$ は τ をパラメータにもち τ に関して $\mathcal{H}_2$ 上正則であることから，I_{kl} も τ の函数であって $\mathcal{H}_2$ 上正則である．

定理　τ によらない定数 a, b, c, d が存在して

$$I_{56} = aI_{12} + bI_{23} + cI_{34} + dI_{45}$$

が成り立つ．

(4) On the number of critical points of a product of complex powers of theta functions

Let $X = \boldsymbol{C}^2/(\boldsymbol{Z}^2 + \tau\boldsymbol{Z}^2)$ be a principally polarized abelian surface, where τ is a two-by-two complex symmetric matrix with positive definite imaginary part. Assume that X is not a product of two elliptic curves. Let $z = (z_1, z_2)$ be the standard coordinates of $\boldsymbol{C}^2$. For an integer N greater than 1, let $D_1, \ldots, D_N$ be N distinct theta divisors such that the sum $D = \sum_{k=1}^{N} D_k$ has normal crossings. For each k, there exist four real numbers $a_{2k-1},\ a_{2k},\ b_{2k-1},\ b_{2k}$ such that D_k is defined by the equation $\theta \begin{bmatrix} a_{2k-1}\, a_{2k} \\ b_{2k-1}\, b_{2k} \end{bmatrix} (z_1, z_2; \tau) = 0$. Here $\theta_k(z,\tau) = \theta \begin{bmatrix} a_{2k-1}\, a_{2k} \\ b_{2k-1}\, b_{2k} \end{bmatrix} (z_1, z_2; \tau)$ denotes a usual theta function (e.g. Farkas-Kra, Riemann Surfaces). We set $M = X - D$. Let $c_1, \ldots, c_N$ be complex numbers but not integers such that $\sum_{k=1}^{N} c_k = 0$. We define a multiplicative function $T_c(z)$ on M by $T_c(z) = \prod_{k=1}^{N} \theta_k(z,\tau)^{c_k}$, where $c = (c_1, \ldots, c_N)$. We also write $T(z)$ instead if omission of c causes no confusion. Note that $T_c(z_0) \neq 0$ if $z_0 \in M$.

Definition. We set $C(T_c(z)) = \{z_0 \in M \mid d(\log T_c)(z_0) = 0\}$. An element of $C(T_c(z))$ will be called a *critical point* of $T_c(z)$.

Theorem. For a generic value of the parameter c, we have $\sharp|C(T_c(z))| = \chi(M)$, where $\chi(M)$ denotes the Euler number of M.

(5) コンパクト台のコホモロジーについて

X は種数 $g \geq 1$ のリーマン面，$p_1, \ldots, p_n \in X$ $(n \geq 2)$ とし，$X^* = X - \{p_1, \ldots, p_n\}$ とおく．$j : X^* \hookrightarrow X$ とする．$m_1, \ldots, m_n \in \boldsymbol{C} - \boldsymbol{Z}$ とし，$\sum_{k=1}^{n} m_k = 0$ を満たすとする．$D = \sum_{k=1}^{n} p_k$ を被約因子とする．ω_{kl} $(k \neq l)$ は $X - \{p_k, p_l\}$ 上で正則な 1 形式であって，点 p_k で 1 位の極，留数 $+1$ をもち，点 p_l で 1 位の極，留数 -1 をもつものとする．Kumamoto J. Math. Vol. 29 (2016), 55-63 に従い $T(u) = T_1(u)T_2(u)$ は乗法的函数とする．$d\log T_1 = \sum_{k=1}^{n-1}(m_1 + \cdots + m_k)\omega_{k,k+1}$

が成立する．$\mathcal{L}=\boldsymbol{C}\,T(u)^{-1}$, $\check{\mathcal{L}}=\boldsymbol{C}\,T(u)$ とおけば，これらは X^* 上の局所定数層である．P は X 上の正則直線束であって，$T_2(u)^{-1}$ が有理的大域切断であるようなものとする．$c_1(P)=0$ が成り立つ．X^* 上の完全系列

$$0\to\mathcal{L}\to\mathcal{O}_{X^*}(P|X^*)\xrightarrow{\nabla}\Omega^1_{X^*}(P|X^*)\to 0$$

が成り立つ．ただし $\nabla\varphi:=d\varphi+\varphi\,d(\log T_1)$，$\nabla^2=0$ である．同型 $H^k(X^*,\mathcal{L})\cong\mathbf{H}^k(X,\Omega^\bullet_X\langle D\rangle(P),\nabla)$ および $H^k_c(X^*,\check{\mathcal{L}})\cong\mathbf{H}^k_c(X,\Omega^\bullet_X\langle D\rangle(-D)(\check{P}),\check{\nabla})$ が成り立つ．下付き添え字の $_c$ はコンパクト台の意味．$\mathbf{H}^k(X,\Omega^\bullet_X\langle D\rangle(P),\nabla)$ の構造は前掲の論文で調べたが，結果が改良でき以下を得る．

定理 1　前掲の論文の記号を踏襲する．P の如何にかかわらず，

$$H^1(X^*,\mathcal{L})\cong\frac{H^0(X,\Omega^1_X(2D)(P))}{\nabla\,H^0(X,\mathcal{O}_X(D)(P))}$$

および

$$0\longrightarrow E^{10}_\infty\longrightarrow H^1(X^*,\mathcal{L})\longrightarrow E^{01}_\infty\longrightarrow 0$$

が成り立つ．

$\mathbf{H}^k_c(X,\Omega^\bullet_X\langle D\rangle(-D)(\check{P}),\check{\nabla})$ の構造を調べる．チェック・ドラームの 2 重複体を考え，付随するスペクトル系列を $E_1^{pq}=H^q(X,\Omega^p_X\langle D\rangle(-D)(\check{P}))$ とする．次が成り立つ．

命題 1　$\check{P}\neq 1$ のとき，$E_1=E_\infty$ であって，

$$\begin{aligned}E^{10}_\infty&=H^0(X,\Omega^1_X(\check{P})),\\ E^{01}_\infty&=H^1(X,\mathcal{O}_X(-D)(\check{P}))\\ &\cong\frac{H^0(\Omega^1_X(2D)(\check{P}))}{\check{\nabla}\,H^0(\mathcal{O}_X(D)(\check{P}))+H^0(\Omega^1_X(\check{P}))}\end{aligned}$$

である．

命題 2　$\check{P}=1$ のとき，$E_2=E_\infty$ であって，

$$\begin{aligned}E^{10}_\infty&=H^0(X,\Omega^1_X),\\ E^{01}_\infty&=\mathrm{Ker}\,[E^{01}_1\xrightarrow{\check{\nabla}}E^{11}_1]\\ &\cong\frac{H^0(\Omega^1_X(2D))}{\check{\nabla}\,H^0(\mathcal{O}_X(D))+H^0(\Omega^1_X)}\end{aligned}$$

である．

命題 1，2 を総合して，$\check{P}$ の如何にかかわらず以下の定理を得る．

定理 2　$\check{P}$ の如何にかかわらず，

$$H^1_c(X^*,\check{\mathcal{L}})\cong\frac{H^0(\Omega^1_X(2D)(\check{P}))}{\check{\nabla}\,H^0(\mathcal{O}_X(D)(\check{P}))}$$

および

$$0\longrightarrow E^{10}_\infty\longrightarrow H^1_c(X^*,\check{\mathcal{L}})\longrightarrow E^{01}_\infty\longrightarrow 0$$

が成り立つ．

(6) Kummer 曲面について

指標が半整数である 16 個の 2 変数テータ函数に番号を適当に割り振ることとし，これらを $\theta_k(z_1,z_2)=\theta_k(z_1,z_2,\tau)$ $(k=1,\cdots,16)$ と書くことにする．これらに対応する 16 個のテータ因子を D_k とする．今，$\mathit{\Gamma}=\boldsymbol{Z}^2+\tau\boldsymbol{Z}^2$ とおき，$M=\boldsymbol{C}^2/\mathit{\Gamma}-\cup_k D_k$ と置く．M は，$\boldsymbol{C}^2/\mathit{\Gamma}$ を 16 点爆発させた多様体から例外曲線および D_k の固有変換計 32 本の正規交叉因子を除いた開集合と同型である．固有変換を記号を混同して D_k で表わし，例外曲線は E_l $(l=1,\cdots 16)$ で表わすことにする．

命題 1　M のオイラー数は 112 である．

M 上に乗法的函数 $T(z_1,z_2)=\prod_k\theta_k(z_1,z_2)^{c_k}$ を定める．ただし，c_k は有理数でない複素数とし，$\sum_k c_k=0$ を満たすとする．次は明らか．

命題 2　乗法的函数 $T(z_1,z_2)$ の D_k のまわりの局所測多価係数は $e^{2\pi i c_k}$ である．また，E_l のまわりの局所測多価係数は，$e^{2\pi i(c_{k_1}+c_{k_2}+c_{k_3}+c_{k_4}+c_{k_5}+c_{k_6})}$ である．

以上の考え方により，M 上に乗法的函数 T から決まる局所定数層 $\mathcal{L}$ を導入することができ，これを係数とするコホモロジーを考えることができる．青本 (K. Aomoto, On vanishing of cohomology attached to certain many valued meromorphic functions, J. Math. Soc. Japan, Vol. 27 (1975), 248-255) によれば，$H^p(M,\mathcal{L})=0$ $(p\neq 2)$ である．よって，112 次元ある $H^2(M,\mathcal{L})$ の構造に興味がある．これを調べるために，論文 H. Watanabe, Internat. J. Math., Vol. 27 (2016), 1650049 (41 pages) では，非有理的多様体上で正規交叉因子を除いた空間の局所系係数コホモロジーの研究を行なっていることから，この議論を応用することが可能ではないかと思われる．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 水谷康宏，渡辺文彦	４．巻 第58巻第1号
２．論文標題 種数2のRiemann面上の積分表示に関する1次関係式について	５．発行年 2020年
３．雑誌名 防衛大学校理工学研究報告	６．最初と最後の頁 23-30
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計6件（うち招待講演　3件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 渡辺文彦、水谷康宏
２．発表標題 種数2の超幾何型積分について
３．学会等名 日本数学会秋季総合分科会函数方程式論分科会
４．発表年 2021年

１．発表者名 渡辺文彦
２．発表標題 テータ函数の複素冪積の臨界点の個数について
３．学会等名 日本数学会秋季総合分科会代数学分科会
４．発表年 2021年

１．発表者名 渡辺　文彦
２．発表標題 テータ因子の補集合の基本群
３．学会等名 日本数学会2018年度秋季総合分科会代数分科会・岡山大学
４．発表年 2018年

１．発表者名 渡辺　文彦
２．発表標題 Wirtinger積分とテータ因子の配置の幾何
３．学会等名 第56回実函数論・函数解析学合同シンポジウム（お茶の水女子大学）（招待講演）
４．発表年 2017年

１．発表者名 渡辺　文彦
２．発表標題 Wirtinger積分とテータ因子の配置の幾何
３．学会等名 立教大学数理物理学研究センター第９回セミナー（招待講演）
４．発表年 2018年

１．発表者名 渡辺　文彦
２．発表標題 テータ因子の補集合の基本群とツイストホモロジー
３．学会等名 琉球超幾何ワークショップ2018（琉球大学・理学部）（招待講演）
４．発表年 2018年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

渡辺文彦の頁（防衛大学校数学教育室校内専用） http://home.nda.ac.jp/~hwatanab/

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
連携研究者	伊藤　公毅 (Ito Ko-Ki) (30456842)	大阪電気通信大学・工学部・准教授 (34412)	
連携研究者	鈴木　範男 (Suzuki Norio) (80211986)	北見工業大学・工学部・准教授 (10106)	
連携研究者	眞野　智行 (Mano Toshiyuki) (60378594)	琉球大学・理学部・教授 (18001)	
連携研究者	山田　浩嗣 (Yamada Hiroshi) (50210472)	北見工業大学・工学部・教授 (10106)	

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関