様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　５ 月 １１ 日現在

機関番号：１２２０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2019
課題番号：１６K０５１６７

研究課題名（和文）微分可能写像における測度拡大性の特徴付けに関する研究

研究課題名（英文）On the characterization of measure-expansive differentiable maps

研究代表者
酒井　一博（Sakai, Kazuhiro）

宇都宮大学・教育学部・教授

研究者番号：３０２０５７０２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　1,700,000円

研究成果の概要（和文）：　本研究では，測度拡大的な微分可能写像の力学を微分幾何学的力学系理論の立場から特徴付けを目指したが，その完成には至っていない。すべての測度に対し測度拡大的な正則微分可能写像のC1-位相に関する内点は，擬-アノソフ系と一致すること，測度正拡大性を満たす微分可能写像については，周期点の集合が無限個の反発的周期点と有限個の吸引的周期点から成る系に限れば，内点が双曲的であることを確認した。
本研究の推進過程において尾行性の概念を一般化した測度尾行性の概念を導入した。測度尾行性をもつ力学系を特徴付けると同時に，尾行性を持たない力学系に対しては尾行可能な擬軌道の量的評価に成功し，その概念の有用性を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究は，測度論との融合という新たな視点から特異点の存在を踏まえた微分可能力学系における一様双曲系の分類（特徴付け）を行おうというものであり，単に分類（特徴付け）のための新たな視点・概念の導入にとどまることなく，本研究の推進過程で発見・開発される新たな解析手法により力学系理論全体における研究の進展に貢献することができる。
また，測度拡大的の概念はカオスの定義の構成要素である初期値鋭敏性とも深い関係がある。本研究では，その概念を測度論的な視点，すなわち「観測可能の視点」から研究を展開しようとするもので，そこで得られた研究成果や新たな知見はカオス理論研究の応用面においても大きな寄与が期待できる。

研究成果の概要（英文）：　The purpose is to characterize the dynamics of differentiable maps with expansive measures from the viewpoint of geometric theory of dynamical systems, but not completed yet.　It has shown that the C1-interior of the set of regular differentiable maps which are measure expansive for any measure coincides with quasi-Anosov systems, and that any differentiable map in the C1-interior of the set of positively measure expansive maps for any measure is hyperbolic when the set of periodic points of the system is composed of infinitely many expanding periodic points and finitely many contracting periodic points.
In the above process, we introduced the notion of shadowable measures from the measure theoretical view point.　Then, the usefulness of the notion has been shown by obtaining a characterization of the dynamical system with shadowable measures, and, by estimating the measures of shadowable pseudo-orbits for the systems without the shadowing property.

研究分野：力学系理論

キーワード：拡大性　確率測度　測度拡大性　双曲性

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

拡大的位相同相写像（expansive homeomorphism）の概念は，導入されて以来，位相力学系理論の発展に大きく寄与してきた([4])。この概念はマルコフ分割の存在にも深く関係し，力学系のエルゴード理論的研究においても本質的な役割を担っている。最近，Morales-Sirvent [7] により拡大性の一つの一般化として測度拡大性（measure-expansivity）の概念が導入され，測度論的視点から拡大的位相力学系の研究が推進されている。そこでは，測度拡大性から導かれる結果を応用し「単位円周上には拡大的位相同相写像が存在しない」という有名な定理の測度論的視点からの明快な別証明を与えており，その概念の有用性が示されている。

（１）報告者は，平成 25-27 年度科学研究費基盤研究（C），研究課題：測度論的拡大性を持つ微分可能力学系の特徴付けに関する研究（課題番号：25400105）により，測度拡大性を満たす微分同相写像を考察し，微分幾何学的力学系理論における拡大性の測度論的研究において一定の成果を得た。具体的には，確率測度全体，不変確率測度全体，不変エルゴード的確率測度全体に対し，それぞれにおいて測度拡大性を満たす微分同相写像の集合を考察対象とし，その C^1-位相に関する内点や稠密な部分集合を特徴付けた（[13]，[14]）。

（２）２．で記述するように，本研究では微分可能写像（同相写像とは限らない）$C^1(M)$の範疇において上記（１）と同様な特徴付けを得ることを目的とする。（特異点を持たない）正則写像の範疇においては，拡大性について報告者による研究成果があり，本研究推進のための土台が構築されていた。また，一般の$C^1(M)$の範疇でも，測度正拡大性を満たす写像に限ればその特徴付けが完了していた（[1]，[5]）。

微分幾何学的力学系理論のより一層の発展のためには（１）成果の一般化は必要不可欠であり，（２）よりその研究推進のための準備は整っていた。

２．研究の目的

本研究では測度拡大性の概念を C^∞閉多様体 M 上の微分可能力学系（同相写像とは限らない）に導入し，測度論的視点から拡大的微分可能写像を微分幾何学的力学系理論の立場で特徴付ける。

M 上の微分可能写像全体（同相写像とは限らない）の空間を$C^1(M)$で表し，C^1-位相を導入する。$f\in C^1(M)$に対し，f の軌道 $f(x_n)=x_{n+1}$ $(n\in\mathbb{Z})$を簡単に$\{x_n\}_{n\in Z}$ $(\subset M)$で表す。f が**拡大的**であるとは，ある定数 $c>0$ が存在して，任意の２つの軌道$\{x_n\}_{n\in Z}$, $\{y_n\}_{n\in Z}$に対し，$d(x_n,y_n)\leqq\delta$ $(\forall n\in\mathbb{Z})$であれば，$x_0=y_0$ となることをいう。ここで，d は M 上の距離。拡大的な f の全体を $\mathcal{E}$ で表すことにする。

M 上の確率測度μ（μは f-不変とは限らない）に対し，f が**μ-拡大的**（または f が**測度拡大的**）であるとは，ある$\delta>0$ が存在し，すべての$\{x_n\}_{n\in Z}$に対し$\mu(\Gamma_\delta(x_0))=0$ が成立することをいう。ここで，

$$\Gamma_\delta(x_0)=\{y_0\in M:\exists\{y_n\}_{n\in Z}\ \text{s.t.}\ d(x_n,y_n)\leqq\delta\ (\forall n\in\mathbb{Z})\}$$

とする。本研究の目的を具体的に説明するため，M 上の確率測度全体を $\mathcal{M}(M)$とし，f-不変確率測度全体を $\mathcal{M}_f(M)$で表す。

（１）本研究では，

$$\mathcal{PE}=\{f\in C^1(M):\mu\text{-拡大的}\ (\forall\mu\in\mathcal{M}(M))\},\quad \mathcal{IE}=\{f\in C^1(M):\mu\text{-拡大的}\ (\forall\mu\in\mathcal{M}_f(M))\}$$

をその考察の対象とし，これらの C^1-位相に関する内点を双曲性の概念を用いて特徴付ける。測度拡大性を満たす写像 f の軌道振舞を反映する確率測度が $\mathcal{M}(M)$に属するか $\mathcal{M}_f(M)$に属するかにより，考察対象となる写像の範囲が変更される。

（２）本研究では，単に対象とする確率測度に連動する写像の特徴付けについての研究を推進するのみではなく，微分幾何学的力学系理論と測度論の融合を図ることで，特徴付けの過程において発見される新たな概念・新たな研究手法の創出も目指す。

３．研究の方法

前述のように本研究では２つの集合 $\mathcal{PE}$, $\mathcal{IE}$ を考察対象とする（定義より $\mathcal{E}\subset\mathcal{PE}\subset\mathcal{IE}$）。拡大的微分同相写像の C^1-位相に関する内点は Mañé [6] により{Axiom A（双曲性）＋擬横断性条件}を満たす力学系として特徴付けされているが，微分可能写像（同相とは限らない）の範疇では一般に特異点が存在するため，その証明手法を即座に適用することはできない。本研究では，まず，正則写像（特異点を持たない微分可能写像）の全体を $\mathcal{R}(M)$ $(\subset C^1(M))$で表し，研究を開始する。

集合 $\mathcal{E}\cap\mathcal{R}(M)$（拡大的正則写像の全体）の C^1-位相に関する内点は，[1] により双曲性（＋擬横断性条件）を満たす力学系として特徴付けされている。また，微分同相写像 $\mathrm{Diff}(M)$ $(\subset C^1(M))$の場合，すべての周期点が双曲的である微分同相写像の C^1-位相に関する内点は，Hayashi [3] により Axiom A を満たすことが知られている。この結果に報告者による研究成果・手法（例えば[10]）を応用することで，上記２つの内点集合（intA で集合 A の内点を表す）について

$$\mathrm{int}\mathcal{PE}\cap\mathrm{Diff}(M)=\mathrm{int}\mathcal{E}\cap\mathrm{Diff}(M),\ \mathrm{int}\mathcal{IE}\cap\mathrm{Diff}(M)=\{\text{Axiom A+no-cycles}\}\cap\mathrm{Diff}(M)$$

が成り立ち，測度拡大性と双曲性との関係が明確となっている（[13]）。
本研究では（同相写像とは限らない）微分可能写像の範疇で上記の内点集合を特徴付けすることであり，前述のように微分可能写像には一般に特異点が存在することから，[13] で使った証明手法・結果は無条件では使えない。特異点の存在を踏まえた微分可能写像における Axiom A の概念は，[11]，[12] 等で既に取り扱われている。測度拡大性の概念とそれらの Axiom A との関連を詳細に検討するとともに，より弱い形の Axiom A の概念の創出も視野に入れつつ分類・特徴付けを推進する。
研究目的達成に向け，本研究では次のステップを踏む。

（１）$\mathcal{R}(M)$の範疇において，測度拡大性を特徴付ける。

[1] により $\mathrm{int}\,\mathcal{E}\cap\mathcal{R}(M)$の特徴付けが完了しており，$\mathcal{R}(M)$の範疇においては，微分同相写像の場合と同様な結果の証明が十分期待できる。すなわち，[1]，[13] の証明を詳細に辿ることにより，$\mathrm{int}\mathcal{PE}\cap\mathcal{R}(M)=\mathrm{int}\mathcal{SE}\cap\mathcal{R}(M)$及び $\mathrm{int}\mathcal{SE}\cap\mathcal{R}(M)=\{\text{Axiom A+no-cycle}\}\cap\mathcal{R}(M)$を証明する。

（２）特異点の存在を踏まえた Axiom A の概念は既に取り扱われているが，本研究ではより弱い概念の創出も視野に入れつつ分類・特徴付ける。

写像 $f\in C^1(M)$に対し，周期点全体を $P(f)$で表す。周期点 $p\in P(f)$の全ての固有値の絶対値が 1 より小さいとき，p を吸引的周期点という。また，$p\in P(f)$の全ての固有値の絶対値が 1 より大きいとき，p を反発的周期点という。

① 吸引的周期点の全体 $P_{\dim M}(f)(\subset P(f))$は有限集合であること，反発的周期点全体 $P_0(f)(\subset P(f))$の閉包は双曲的（expanding）であることを証明する。
$P_{\dim M}(f)$が有限集合であることを示す場合は，特異点が存在していても差し支えない。f が**μ-正拡大的**であるとは，ある $\delta>0$ が存在し，すべての $x\in M$ に対し $\mu(\Gamma^+_\delta(x))=0$ が成立することをいう。ここで，

$$\Gamma^+_\delta(x)=\{y\in M: d(f^n(x),f^n(y))\leqq\delta\ (\forall n\in\mathbb{Z}^+)\}$$

である。μ-正拡大的な写像の C^1-位相における内点については，特異点の存在を排除することが可能である（[5]）。μ-正拡大的な写像の研究において報告者自身が開発した技法を応用することにより，反発的周期点全体 $P_0(f)(\subset P(f))$の閉包に対して双曲性（expanding）を証明する。

② 特異点の存在を踏まえた形で $\mathrm{int}\mathcal{PE}=\mathrm{int}\mathcal{E}$，$\mathrm{int}\mathcal{SE}=\{\text{Axiom A+no-cycles}\}$を証明する。
$P_0(f)$，$P_{\dim M}(f)$ 以外の周期点全体の閉包の双曲性を証明する。その過程では特異点に係る条件を付けた形での特徴付けを行うが，もちろん，特異点に係る条件を可能な限り弱める。

４．研究成果
本研究では，測度拡大的の概念を微分可能写像の空間に導入し，拡大性を満たす微分可能写像を測度論的視点から考察，微分幾何学的力学系理論の立場から特徴付けるとともに，測度論との融合という新たな視点から微分可能力学系における Axiom A 系の特徴付けを目指したが，その完成には至っていない。
同相写像ではない微分可能写像には，一般に特異点が存在するため，従来の研究手法はそのままでは応用できない。拡大的微分可能写像の全体を $\mathcal{E}$，正則写像（特異点を持たない微分可能写像）の全体を $\mathcal{R}(M)$で表す。集合 $\mathcal{E}\cap\mathcal{R}(M)$の C^1-位相に関する内点は，報告者自身により{Axiom A ＋擬横断性条件}を満たす力学系として特徴付けされている。この成果を基に，微分同相写像の場合の研究手法を見直すことで，$\mathcal{R}(M)$の範疇においては測度拡大性を満たす微分可能写像に対しても同様な結果が得られることが確認できた。また，測度正拡大性を満たす微分可能写像の特徴付けについても，周期点の集合が無限個の拡大的周期点と有限個の吸引的周期点から成る力学系に限れば，測度正拡大性を満たす微分可能写像の内点は双曲的であることの確認も完了した。
その後の研究では，これらの証明手法の一般化，すなわち正則性の条件を取り除いてくプロセスを推進したが，現時点で課題解決に直接結びつく成果は得られていない。正則とは限らない微分可能力学系は，Aoki-Moriyasu-Sumi [2] 及び Przytycki [11] で取り扱われており，研究期間終了後においてもそこで開発された研究手法の詳細な検討を継続する予定である。
一方，本研究の推進過程で得ることができた新たな知見がある。近代の微分幾何学的力学系の定性論的研究において拡大性と共に中心的役割を担っている概念に**尾行性**（shadowing property）がある。f を M 上の位相同相写像とする。与えられた $\delta>0$ に対し，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}+}$が f の δ-擬軌道であるとは，$d(f(x_n),x_{n+1})<\delta\ (\forall n\in\mathbb{Z}^+)$が成り立つことをいう。任意の $\varepsilon>0$ に対し，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}+}$が ε-尾行されるとは，ある $y\in M$ が存在して，$d(f^n(y),x_n)<\varepsilon\ (\forall n\in\mathbb{Z}^+)$が成り立つことをいう。f が尾行性を持つとは，任意の $\varepsilon>0$ に対し $\delta>0$ が存在し，すべての f の δ-擬軌道が ε-尾行されることをいう。最近，報告者を中心にこの概念を測度論の立場から一般化し，測度尾行性の概念を新たに導入することができた（その詳細は省略する）。測度尾行性の研究は，その精神・姿勢としては

測度拡大性の研究と同じ延長上にあり，研究の推進にあたってはそこで培われたノウハウを十分に活かすことが可能である。

拡大性と尾行性を併せ持つ力学系は,位相安定性として位相力学系理論の範疇でWalters [15]により研究が開始され，力学系の数値計算的研究の進展にも寄与している。報告者は尾行性を持つ微分同相写像の C^1-位相に関する内点の特徴付けを通し，力学系の分類を行ってきた（[10]）。本研究の推進と並行し，測度尾行性についても検討し，現時点では，測度尾行性の概念が意味ある一般化であることを示すとともに，測度論的な尾行性をもつ力学系を特徴付けした（[8]）。

力学系の数値計算的研究をより一層発展させるためには，尾行性理論の研究対象を拡張する必要がある。そのためには尾行性の概念の拡張が不可欠である。報告者は測度尾行性の概念の導入により，尾行性を持たない力学系に対し，尾行可能な擬軌道の量的評価にも成功している（[12]）。また，エルゴード的測度尾行性の内点に属する微分同相写像の特徴付けに関する方法論（アイデア）は，測度拡大性の研究にも応用できる可能性がある。エルゴード的測度尾行性の内点に属する微分同写像について，例えば，非遊走集合上に占有的分解が無いと仮定すると，絶対値１の固有値をもつ周期点の存在が言える。その固有値が複素の場合は，ダンジョワ写像を埋め込むことで矛盾を得る。なぜならばダンジョワ写像は尾行性を持たない（[12]）。

以上のように，本研究の推進過程で生まれた新たな概念の導入・展開により，そこでの推論から逆に，測度拡大性の研究手法について新たな知見を得ることができた。引き続き測度拡大性に係る研究を推進するとともに，測度尾行性の研究も発展させていく。

＜引用文献＞

[1] N. Aoki, K. Moriyasu and K. Sakai, *C-expansive differentiable maps*, Advanced Ser. in Dynamical Systems **6**, World Sci. Pub., Singapore (1989), 145-152.

[2] N. Aoki, K. Moriyasu and N. Sumi, *C^1-maps having hyperbolic periodic points*, Fund. Math. **169** (2001), 1-49.

[3] S. Hayashi, *Diffeomorphisms in $\mathcal{F}^1(M)$ satisfy Axiom A*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **12** (1992), 233-253.

[4] 平出耕一，拡大的写像の力学系，数学 **42** (1990), 32-47.

[5] K. Lee, M. Lee, K. Moriyasu and K. Sakai, *Positively measure-expansive differentiable maps*, J. Math. Anal. Appl. **435** (2016), 492-507.

[6] R. Mañé, *Expansive diffeomorphisms*, Dynamical systems-Warwick 1974 (Proc. Sympos. Appl. Topology and Dynamical Systems, Univ. Warwick, Coventry, 1973/1974), 162-174, Lecture Notes in Math. **468**, Springer, Berlin, 1975.

[7] C. A. Morales and V. F. Sirvent, *Expansive measures*, IMPA Mathematical Publications 29, Colóquio Brasileiro de Matemática, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2013.

[8] K. Moriyasu, K. Sakai and N. Sumi, *Diffeomorphisms with shadowable measures*, Axioms 2018, **7** (4), 93; https://doi.org/10.3390/axioms7040093

[9] K. Moriyasu, K. Sakai and N. Sumi, *Shadowing property and invariant measures having full supports*, Qualitative Theory of Dynamical Systems **19** (2020), Published: 17 January 2020, https://doi.org/10.1007/s12346-020-00338-9

[10] S. Yu. Pilyugin and K. Sakai, *Shadowing and Hyperbolicity*, Lecture Notes in Math. **2193** (2017), Springer, Cham.

[11] F. Przytycki, *On Ω-stability and structural stability of endomorphisms satisfying Axiom A*, Studia Math. **60** (1977), 61-77.

[12] K. Sakai and N. Sumi, *The measures of shadowable pseudo-orbits*, Dynamical Systems: An International Journal, Published online: 28 Dec 2019, https://doi.org/10.1080/14689367.2019.1703907

[13] K. Sakai, N. Sumi and K. Yamamoto, *Measure-expansive diffeomorphisms*, J. Math. Anal. Appl. **414** (2014), no. 2, 546-552.

[14] K. Sakai, N. Sumi and K. Yamamoto, *Ergodic measure-expansive diffeomorphisms*, Dynamical Systems: An International Journal **29** (2014), 569-577.

[15] P. Walters, *On the pseudo-orbit tracing property and its relationship to stability*, The structure of attractors in dynamical systems (Proc. Conf., North Dakota State Univ., Fargo, N.D., 1977), 231-244, Lecture Notes in Math. **668**, Springer, Berlin, 1978.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計3件（うち査読付論文　3件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 K. Moriyasu, K. Sakai and N. Sumi	４．巻 7 (4)
２．論文標題 Diffeomorphisms with shadowable measures	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Axioms	６．最初と最後の頁 1-10
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3390/axioms7040093	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 ―

１．著者名 K. Sakai and N. Sumi	４．巻 -
２．論文標題 The measures of shadowable pseudo-orbits	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Dynamical Systems: An International Journal	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/14689367.2019.1703907	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 ―

１．著者名 K. Moriyasu, K. Sakai and N. Sumi	４．巻 -
２．論文標題 Shadowing property and invariant measures having full supports	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Qualitative Theory of Dynamical Systems	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s12346-020-00338-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 ―

〔学会発表〕　計0件

〔図書〕　計1件

１．著者名 S. Yu. Pilyugin and K. Sakai	４．発行年 2017年
２．出版社 Springer-Verlag	５．総ページ数 216
３．書名 Shadowing and Hyperbolicity, Lecture Notes in Mathematics 2193	

〔産業財産権〕

〔その他〕

—

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考