

令和元年6月5日現在

機関番号：16101

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05176

研究課題名（和文）パンルヴェ超越函数の大域接続問題

研究課題名（英文）Global connection problems on the Painleve transcendental functions

研究代表者

大山 陽介（OHYAMA, Yousuke）

徳島大学・大学院社会産業理工学研究部（理工学域）・教授

研究者番号：10221839

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,600,000円

研究成果の概要（和文）：非線型函数方程式の中でも比較的良好な性質を持つパンルヴェ超越函数の大域接続問題を目標にした。実際には、パンルヴェ超越函数の大域問題を直接扱うには至らず、 q -差分超幾何方程式の接続問題を解いていった。超幾何微分方程式と異なり、近年重要になっている q -差分方程式の接続問題はほとんど手付かずであった。その中で、 q -差分超幾何方程式は最も基本的な方程式系であるが、接続公式を導くための基本的な手法を確立するとともに主要な場合について、大域的な接続問題を確定特異点を少なくとも一つ持つ場合に完全に解くことに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

q -差分超幾何方程式は、超幾何微分方程式同様に19世紀から研究されてきた方程式であるが、その詳しい解析が遅れていたために、従来は応用が少なかったが、近年は q -差分方程式が数理学の多くの分野に使われるようになっている。積分表示や近接関係式、接続問題などを調べることで「特殊函数」としての位置付けが明確になり、今後より多くの応用が見込まれる。数理物理学だけでなく数学の中でも表現論や微分幾何学などで重要になるだろうし、何よりも申請者の主目的とする q -パンルヴェ超越函数の大域構造の解明には重要な役割を果たすと期待される。

研究成果の概要（英文）：The aim of this research is a connection problem of the Painleve functions. We found many connection formulae on q -hypergeometric equations, which will play a key role to study global analysis on the Painleve equations. We constructed a basic theory on local analysis around irregular singular points of q -difference equations at first. We applied our new method to connection problems of q -hypergeometric equations, and we have solved connection problems on q -analogues of generalized hypergeometric equations in the case of at least one regular singular points.

研究分野：古典解析学

キーワード： q -差分方程式 超幾何方程式 漸近解析

様式 C-19、F-19-1、Z-19、CK-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

q -差分パウルヴェ方程式の解析的な性質を調べるためには、その大域構造を知ることが重要である。研究開始当初では、 q -差分パウルヴェ方程式の Lax 対は E 型を含めてわかってきていたが、パウルヴェ以前に q -差分超幾何方程式の接続問題が完全には解けていなかった。特に q -差分高階超幾何方程式に関しては、研究開始当時は問題点すらも明確ではなかった。

研究開始当初では、共形場理論の視点からパウルヴェ方程式の漸近展開を共形ブロックを用いて表示する Lissovy らの研究を一つの起点として考えており、そこから q -差分パウルヴェ方程式の漸近解析や楕円漸近解析への展開が望まれる状況であった。

2. 研究の目的

パウルヴェ方程式の漸近展開を主目的として、べき級数型・指数型漸近解析の精密化、楕円漸近解析、さらに q -差分パウルヴェ方程式の大域構造を目標とした。確定特異点と不確定特異点、微分と差分などさまざまなケースが個別にあり、パウルヴェ方程式のタイプに応じて漸近解析を解明することを目的とした。

3. 研究の方法

q -差分パウルヴェ方程式の大域構造を考える上で、 q -差分高階超幾何方程式のストークス現象の理解が重要であると考えて、 q -差分高階超幾何方程式の大域解析を行なった。主要な手法は、 q -ボレル-ラプラス変換であるが、従来のものを拡張して

- (1) 分数べきの q -ボレル変換
- (2) 多重 q -ボレル-ラプラス変換

などを使って、一般の場合を扱えるようにした。さらに双方向超幾何級数の q -ボレル-ラプラス変換を扱った。

さらに、この q -差分高階超幾何方程式の大域解析を用いることで、 q -差分パウルヴェ方程式の漸近解析を得ることができる。

4. 研究成果

主に q -差分線型方程式の接続問題について研究を行なった。特に2階超幾何型の場合について、これまで接続問題が解かれていなかったハーン・エクストンの q -ベッセル方程式に対して接続問題を完全に決定した。発散級数の総和について1/2-位数のボレル変換という従来なかった手法を適用したものである。また、 q -ウェーバー関数についても q -合流超幾何関数からの退化という形で接続問題を解いた。従来未解決であった、この2つの方程式の接続問題を解いたことによって、7種類ある2階 q -超幾何型方程式の全てに対して接続問題が解かれたことになる。

続いて、3階以上の超幾何型の場合について2階や高階微分超幾何方程式と異なる点があることに気が付いて再検討を行った。 q -差分でも確定特異点の場合は19世紀の Thomae の接続公式がある。不確定特異点の場合には分岐が生じるが、連続の場合と違って3通りの場合がある。収束級数が分岐する場合、発散級数が分岐する場合、二つの異なる度合いの発散級数を持つ場合である。この3通りは個別に攻略することになるが、統一的な視点で扱うことができるようになった。収束級数が分岐する場合は容易であるが、発散級数が分岐する場合は困難であったが双方向級数を考えることで解決を見た。

最終的には、 q -超幾何差分方程式(Basic hypergeometric equations)の接続問題を、一点が確定特異点の場合に解いたことになる。先述したように、 q -超幾何方程式の接続問題は、古典的には Thomae によって確定特異点型の場合は19世紀に解かれていた。不確定特異点を持つ場合にも Watson によって1910年にいくつかの場合には解かれているが、当時は q -発散級数の総和法が不十分であったために現代的には不満があるものであった。なお、本研究はリール大学の Changgui Zhang 教授との共同研究である。なお、超幾何差分方程式の接続問題は、パウルヴェ方程式の接続問題を解決する際にも基本になるものであり、本研究によって、 q -パウルヴェ方程式の漸近解析や接続問題の多くの問題にも応用可能となる。まだ実行してないが、いくつかの場合はほぼ自動的に計算するだけで求めることができるであろう。

また、主目的である q -パウルヴェ方程式に関しては q -パウルヴェ第 III、第 V 型方程式の漸近解析を調べた。

2018年1月に徳島大学で古典解析研究会を開いて、この分野の研究交流を行なった。30人程度の小さい集まりではあったが、地方大学でも研究交流の一端を担えることを示せたと思う。さらに、2017年はトゥールズとレンヌで行われた学位審査会において海外審査委員を務めた。旅費の多くはフランス側で負担していただいたが、一部の滞在費は科研費でサポートされ、有益な国際交流となった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 (計 2 件)

(1) OHYAMA Yousuke,
Connection formula of basic hypergeometric series, ${}_r\phi_{r-1}(0;b;q,x)$
J. Math. Tokushima Univ., **51** (2017) 29--36. [査読無]
<http://www-math.ias.tokushima-u.ac.jp/journal/mat.html>

(2) OHYAMA Yousuke,
 q -Stokes phenomenon of a basic hypergeometric series ${}_1\phi_1(0;a;q,x)$
J. Math. Tokushima Univ., **50** (2016), 49--60. [査読無]
<http://www-math.ias.tokushima-u.ac.jp/journal/mat.html>

〔学会発表〕 (計 16 件)

(1) OHYAMA Yousuke,
Nonlinear differential equations on theta constants,
«Analyse Complexe et Equations Différentielles», Lille, France, 2019 年 3 月 18 日.

(2) 大山 陽介
 q -差分方程式の不確定特異点
「超幾何方程式研究会 2019」神戸大学, 2019 年 1 月 5 日

(3) OHYAMA Yousuke,
Connection Problem and q -Stokes phenomenon of basic hypergeometric series,
「Formal and analytic solutions of functional equations on the complex domain」, 京都大学数理解析研究所, 2018 年 12 月 18 日

(4) OHYAMA Yousuke,
 q -Stokes phenomenon on basic hypergeometric series,
「The 13th Symmetries and Integrability of Difference Equations」, 福岡市, 2018 年 11 月 12 日

(5) OHYAMA Yousuke,
From Heine to Painlevé: Connection problems of q -difference equations
«Séminaire de systèmes dynamiques», Toulouse, France, 2018 年 2 月 16 日

(6) 大山 陽介
 q -超幾何級数の総和法
「第 2 回古典解析・徳島研究会 ～パウルヴェェ首相百年記念～」徳島大学, 2018 年 1 月 20 日

(7) 大山 陽介
 q -超幾何方程式の Stokes 問題
「超幾何方程式研究会 2018」神戸大学, 2018 年 1 月 6 日

(8) 大山 陽介
高階 q -超幾何方程式の接続問題
「Workshop on Accessory Parameters」, 東大玉原セミナーハウス, 2017 年 10 月 7 日

(9) OHYAMA Yousuke,
Connection problems of q -difference equations of hypergeometric type and the Painlevé type
«Séminaire a Laboratoire Paul Painlevé», Lille, France, 2017 年 9 月 25 日

(10) OHYAMA Yousuke,
Connection problems of q -difference equations --Hypergeometric type and Painlevé type--
「Journées Isomonodromie」, Strasbourg, France, 2017 年 5 月 23 日

(11) 大山 陽介
 q -Bessel 関数の Stokes 現象について
「アクセサリー・パラメーター研究会」熊本大学, 2017 年 3 月 15 日

(12) 大山 陽介
 q -Bessel 関数について
「超幾何方程式研究会 2017」神戸大学, 2017 年 1 月 5 日

(13) OHYAMA Yousuke,
 q -Stokes phenomenon of basic hypergeometric series
«Analytic geometry seminar», Rennes, France, 2016 年 12 月 15 日

(14) 大山 陽介
A q -analogue of the Stokes phenomenon
2016 函数方程式論サマーセミナー, 羽咋市, 2016 年 8 月 2 日

(15) OHYAMA Yousuke,
Some q -Painlevé equations and connection problems
「The 12th Symmetries and Integrability of Difference Equations」, Sainte-Adèle, Canada,
2016 年 7 月 9 日

(16) OHYAMA Yousuke,
 q -Painlevé equations and q -Stokes phenomenon of linear q -difference equations
「差分・微分方程式の指数漸近解析」京都大学数理解析研究所, 2016 年 6 月 6 日

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。