

令和 2 年 6 月 12 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05179

研究課題名(和文)力学系の大偏差原理とその普遍性

研究課題名(英文) Large deviation principle and its universality in dynamical systems

研究代表者

鄭容武 (Chung, Yong Moo)

広島大学・工学研究科・准教授

研究者番号：20314734

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：広いクラスの一次元可微分力学系において大偏差原理を示すという問題に取り組んだ。Juan Rivera-Letelier氏(米国Rochester大)、高橋博樹氏(慶應義塾大)と共同研究を行った。その結果、有界閉区間上の平坦な臨界点を持たない位相完全な可微分写像に対し、双曲性をまったく仮定しなくてもレベル2の大偏差原理が成り立つことを示し、レート関数の具体的表示を与えた。この成果について Large deviation principle in one-dimensional dynamics という表題の論文を執筆し、専門誌にて発表した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究によってカオス力学系の漸近挙動についての理解が進化した。特に、有界閉区間上のLebesgue測度に対して絶対連続な不変確率測度を持つ、したがって大数の法則が成り立つ、全ての2次写像力学系に対して大偏差原理が示された。また、大数の法則が成り立たなくても大偏差原理が成立する例が無数にあることから、大偏差原理が広いクラスのカオス力学系において成り立つ普遍的概念であることが明確になった。さらに、本研究によって大偏差原理におけるレート関数の具体的表示が得られたことから、今後相転移現象やマルチフラクタル解析の研究を発展させるための礎を築くことができた。

研究成果の概要(英文)：We addressed the problem of showing the large deviation principle in a wide class of one-dimensional smooth dynamical systems. We conducted joint research with Juan Rivera-Letelier (Rochester University) and Hiroki Takahashi (Keio University). As a result, it is shown that the level-2 large deviation principle holds without assuming any hyperbolicity for all topologically exact smooth interval maps whose critical points are non-flat. Regarding this result, we wrote the paper entitled "Large deviation principle in one-dimensional dynamics" and published it in a math journal.

研究分野：力学系理論

キーワード：可微分力学系 大偏差原理 双曲性 臨界点 位相完全

1. 研究開始当初の背景

決定論的カオスを理解する上で統計的手法は極めて有効であり、それは力学系の極限定理を通じて実現される。確率論における3大原理の一つである大偏差原理は本来、確率変数列の平均の挙動についての多数の法則や、その平均からの小さなずれについての法則である中心極限定理の次に考察の対象となる、平均からの大きなずれについての法則である。しかし、大偏差原理は多数の法則や中心極限定理の成立を仮定しなくても定式化することができる。力学系理論において多数の法則に対応するものは、エルゴード定理ならびに物理測度(絶対連続不変確率測度や Sinai-Ruelle-Bowen 測度)の存在に関するものである。2次写像や Hénon 写像等によってあたえられる可微分力学系に対して、軌道の双曲性に関する適当な仮定のもとで物理測度が存在することはよく知られていた。さらに力学系がよい混合性を持つ場合には、物理測度の一意性や相関関数の指数的減衰が確かめられ、このことから中心極限定理が導かれる。その一方で、力学系の大偏差原理は、統計力学の数学的定式化やマルチフラクタル解析など広範な応用がある重要なテーマであるにも関わらず、物理測度の存在や中心極限定理等の諸定理と比較すると、(一様双曲性が仮定された限定的な場合を除いて)理解が十分に進んでいなかった。今世紀に入り、非一様双曲型力学系の大偏差原理を誘導変換の手法を用いて理解しようという研究がなされ、帰還時間関数のテールが速く減衰する場合に、平衡状態の近傍の事象について部分的な結果が得られたが、既存の方法によっては平衡状態から離れた事象に関する情報は得られなかった。

研究代表者は、2001年に高橋陽一郎氏から力学系の大偏差原理に関する示唆を受けて以来、一貫してこの問題に取り組んできた。その結果、非一様双曲型力学系に対して、帰還時間関数のテールの減衰を評価しても平衡状態から離れた事象に関する情報は決してあたえられないこと、すなわち、テールが指数的に減衰するにも関わらず大偏差原理のレート関数が決定できない反例を構成し、またレート関数が決定されるための有効な判定条件を示すことができた(研究業績 [2])。さらにその応用として、あるクラスの可微分力学系に対して連続関数による Birkhoff スペクトルを変分的な方法で特徴づけた(研究業績 [1,4])。また、慶應義塾大学の高橋博樹氏との共同研究により、十分多くのカオス的な2次写像力学系に対して、大偏差原理の成立を示すことができた(研究業績 [3,4])。一方で、大偏差原理が成り立つ可微分力学系の具体的な例として現在までに知られているものは、Manneville-Pomeau写像や DA (derived from Anosov)写像といったトールス自己準同型写像の摂動として得られるものを除いて、Collet-Eckmann 条件を満たすなど物理測度の存在が保証されているものに限られていた。大偏差原理が多数の法則とは独立に定式化される概念であることを考えると、物理測度が存在しないような場合も含めた可微分力学系の広い枠組みで大偏差原理の成立が示されることが期待されていた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、可微分力学系の大偏差原理に関する研究をさらに推進してその普遍性を示し、レート関数の解析を通して物理測度の存在や相転移現象を解明することによって、決定論的カオスの統計的性質に関する研究を進展させることであった。また、決定論的力学系の研究にて得られたアイデアをランダム力学系にも適用できるように拡張することによって、非線形確率現象の基礎概念が構築し、その応用を目指すことであった。具体的な課題として以下の3つを設定した。

- (a) 可微分力学系における大偏差原理の普遍性: 多項式写像や Hénon 写像, 撞球写像等のカオス力学系に対して, 大偏差原理が成立するための (物理測度の存在とは独立した) 判定条件をあたえる.
- (b) レート関数の解析とその応用: 熱力学形式論を展開し, 大偏差原理のレート関数を転送作用素の固有値によって特徴づける. また, (有限回くりこみ可能な) 2 次写像力学系に対して, レート関数の解析性や狭義凸性等の幾何的性質が物理測度の存在とどのように関連するのか調べる. さらに, 間欠性カオス力学系に対して, レート関数の解析性が崩壊するとき平衡状態が共存することを示す.
- (c) ランダム力学系の大偏差原理: 区分的拡大写像にランダム・ノイズを加えることによって得られる確率論的力学系に対して, 大偏差原理の成立を示し, そのレート関数を決定する.

3. 研究の方法

本研究の方法は以下のとおりであった.

- (1) 国際研究集会および国内研究集会における情報収集と成果発表
- (2) 各種セミナーや勉強会を通じた国内研究者との情報交換
- (3) 研究協力者との研究打合せ
- (4) 国内外の研究者との情報交換と議論
- (5) 上記の活動によって得られた研究結果の統合と論文執筆

4. 研究成果

本研究によって得られた最大の成果は, 広いクラスの一次元可微分力学系に対して大偏差原理を示すことができたということにある. Juan Rivera-Letelier 氏 (米国 Rochester 大), 高橋博樹氏 (慶應義塾大) と共同研究を行い, その結果, 有界閉区間上の平坦な臨界点を持たない位相完全な可微分写像に対し, 双曲性をまったく仮定しなくてもレベル 2 の大偏差原理が成り立つことを示し, レート関数の具体的表示を与えることができた. この結果について, 論文を執筆し (研究業績 [5]), 米国 Brown 大学, 英国 Edinburgh 大学, 国立台湾大学, 九州大学等で開催された研究集会において発表した. また, 中央大学 Encounter with Mathematics や京都大学数学教室談話会等において, 力学系の大偏差原理について非専門家向けの入門的講義やセミナーを行った.

研究業績

- [1] Birkhoff spectra for one-dimensional maps with some hyperbolicity, *Stochastics and Dynamics* 10, 2010, 53–75.
- [2] Large deviations on Markov towers, *Nonlinearity* 24, 2011, 1229–1252.
- [3] Large deviation principle for Benedicks-Carleson quadratic maps (with Hiroki Takahasi), *Communications in Mathematical Physics* 315, 2012, 803–826.
- [4] Multifractal formalism for Benedicks-Carleson quadratic maps (with Hiroki Takahasi), *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 34, 2014, 1116–1141.
- [5] Large deviation principle in one-dimensional dynamics (with Juan Rivera-Letelier and Hiroki Takahasi), *Inventiones Mathematicae* 218, 2019, 853–888.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yong Moo Chung, Juan Rivera-Letelier, Hiroki Takahasi	4. 巻 218
2. 論文標題 Large deviation principle in one-dimensional dynamics	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Inventiones Mathematicae	6. 最初と最後の頁 853-888
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00222-019-00899-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計15件（うち招待講演 12件/うち国際学会 4件）

1. 発表者名 鄭 容武
2. 発表標題 区間力学系のBirkhoffスペクトル
3. 学会等名 冬の力学系研究集会（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 鄭 容武
2. 発表標題 区間力学系の大偏差原理
3. 学会等名 京都大学数学教室談話会（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 鄭 容武
2. 発表標題 Birkhoff spectra in one-dimensional dynamics
3. 学会等名 研究集会「エルゴード理論とその周辺」（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yong Moo Chung
2. 発表標題 LDP rate function in one-dimensional dynamics
3. 学会等名 Mini-workshop on Dynamical Systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yong Moo Chung
2. 発表標題 Large deviation principle for S-unimodal maps with flat critical point
3. 学会等名 Thermodynamic formalism in dynamical systems (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yong Moo Chung
2. 発表標題 Large deviation principle for unimodal maps with flat critical point
3. 学会等名 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 鄭 容武
2. 発表標題 Large deviations in deterministic/random dynamical systems
3. 学会等名 Kyoto Dynamics Days: Random dynamical systems and their applications (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 鄭 容武
2. 発表標題 平坦な臨界点を持つ単峰写像力学系の大偏差原理
3. 学会等名 研究集会「エルゴード理論とその周辺」(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 鄭 容武
2. 発表標題 平坦な臨界点を持つ単峰写像力学系の大偏差原理とそのレート関数について
3. 学会等名 冬の力学系研究集会(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 鄭 容武, 高橋 博樹
2. 発表標題 平坦な臨界点を持つ単峰写像力学系の大偏差原理について
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yong Moo Chung
2. 発表標題 Recurrence times and large deviation principle in dynamical systems
3. 学会等名 Probability Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 鄭 容武
2. 発表標題 漸近測度を持たない2次写像力学系の大偏差原理
3. 学会等名 研究集会「力学系とその関連分野の連携探索」(招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 鄭 容武
2. 発表標題 多峰写像力学系の大偏差原理
3. 学会等名 研究集会「エルゴード理論とその周辺」(招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 鄭 容武
2. 発表標題 可微分力学系の大偏差原理
3. 学会等名 Encounter with Mathematics (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 鄭 容武
2. 発表標題 平坦なレート関数を持つ2次写像力学系について
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	高橋 博樹 (Takahasi Hiroki)	慶應義塾大学・理工学部・准教授 (32612)	
研究協力者	山本 謙一郎 (Yamamoto Kenichiro)	長岡技術科学大学・工学部・准教授 (13102)	
研究協力者	中野 雄史 (Nakano Yushi)	東海大学・理学部・講師 (32644)	