様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　 元 年　 ５ 月 ２９ 日現在

機関番号：３２６８６
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2018
課題番号：１６K０５１８３

研究課題名（和文）量子トロイダル代数の可積分系への応用

研究課題名（英文）Applications of quantum toroidal algebras to integrable systems

研究代表者
神保　道夫（JIMBO, Michio）

立教大学・理学部・特任教授

研究者番号：８０１０９０８２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,400,000円

研究成果の概要（和文）：共形場理論における運動の保存量(IM)は重要な可積分系である。そのq変形を研究し以下の成果を得た。(1)gln型量子トロイダル代数のnon-local IMを、転送行列(普遍R行列のフォック表現上のトレース)の展開係数として構成した。(2)local IMとnon-local IMの可換性が(glm,gln)双対性として理解できることを示した。(3)gl1型量子トロイダル代数について、ベーテ仮設によるIMのスペクトルの記述を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義
共形場理論において重要な運動の保存量の背景に量子トロイダル代数（リー代数に値をとる２変数ローラン多項式の量子変形）があることが構成的に明らかになった。それにより系の解析に可積分系の標準的な手法を適用することが可能となり、スペクトルに対するベーテ仮設による記述が得られた。これによって量子アフィン代数（１変数ローラン多項式の量子変形）を基礎とする従来の量子可積分研究をトロイダル代数へと拡張する新しい研究方向の端緒が開かれた。

研究成果の概要（英文）：Integrals of motion (IM) in conformal field theory constitute an important class of quantum integrable systems. We studied its q-deformation and obtained the following results. (1) We constructed non-local IM associated with quantum toroidal gln algebra as Taylor coefficients of transfer matrices (traces of the universal R matrix on the Fock representations). (2) We showed that the commutativity between local and non-local IM can be understood as a (glm,gln) duality. (3)We described the spectrum of IM in the case of gl1 quantum toroidal algebra in terms of Bethe's ansatz.

研究分野：可積分系

キーワード：共形場理論　量子トロイダル代数　運動の保存量　ベーテ仮設

1.　研究開始当初の背景

(1) Virasoro 代数の包絡環(の完備化)には可換な作用素の無限系列が存在することが知られている。これらは Virasoro カレントの微分多項式を密度とする積分で与えられ, local な運動の保存量(integrals of motion, 以下 IM と略す)と呼ばれる。Virasoro 代数は古典極限においてポアソン代数に移行するが、この極限で local IM は KdV 階層の可換なハミルトニアンに移行する。そのため IM のなす量子可積分系を量子 KdV 系と言うことがある。より一般に単純リー代数 g に付随する W 代数 Wg において、古典可積分系のハミルトニアンを量子化する local IM の存在が抽象的な方法で確立されている(Feigin-Frenkel,1992)。しかしその具体形は現在も未知である。

(2) Bazhanov-Lukyanov-Zamolodchikov(以下 BLZ, 1996--2003)は一連の論文において、可解格子模型の手法を IM の研究に導入し,量子 KdV 系の固有値問題を深く研究した。BLZ は量子アフィン代数の普遍 R 行列のトレースによって Virasoro 代数の表現空間に働く転送行列を定義し、スペクトルパラメタ無限大における漸近展開の係数に local IM が現れること、また原点における展開係数としてスクリーニング作用素の多重積分である non-local IM が定義できることを示した。特に IM のスペクトルと, Oper と呼ぶある種の常微分作用素族の間の１対１対応を与える ODE/IM 対応(一般には予想)を発見したことは著しい。Feigin-Frenkel(2009)は ODE/IM 対応をアフィン Gaudin 模型の枠組みで理解することを提唱した。その有限次元版に当たる主張は Mukhin-Tarasov-Varchenko(2005--2006), Rybnikov(2016)らによって証明されている。

(3) BLZ の研究は極めて重要であるが、文字通りには理解が難しい側面も含まれており、より代数的な理解が望まれる。理論の正則化として q 変形を研究することは自然である。Feigin-Kojima-Shiraishi-Watanabe(2007)は sln 型 W 代数の場合に local および non-local IM の q 変形を積分表示の形で構成し、その可換性を直接計算で示した。この時点では q 変形の固有値問題は未解決問題として残された。

(4) 量子アフィン代数はリー代数 g を係数とする１変数ループ代数 g[x,1/x]の量子化である。その２変数版は量子トロイダル代数と呼ばれ 1990 年代半ばに導入された。幾何学的表現論・ゲージ理論の進展に伴い、特に AGT 予想を契機として、量子トロイダル代数は近年注目されている。代表者は Feigin,Miwa,Mukhin と共同で、量子トロイダル代数のシャッフル代数による実現を利用し、量子 KdV 系の q 変形について、最も簡単な IM の固有値を記述するベーテ方程式の導出を行なった(2015)。

2.　研究の目的

本研究の目的は、量子トロイダル代数に基づいて IM の q 変形の研究を BLZ に近い形でより組織的に行うことである。具体的には、当面 gln 型代数の場合に限定して、IM の構成とそのスペクトルの記述を目標とする。従来の量子可積分系の研究はほとんど全てが量子アフィン代数を基礎とするものであった。これを量子トロイダル代数の枠組みに拡張することは新しい研究方向として興味がある。IM の q 変形はそのために意味のある具体例を提供していると考えている。

３．研究の方法

次の２点を実行することによって研究を行なった。

(1) 転送行列の構成：普遍 R 行列のトレースにより可換な作用素族を構成することは常套手段である。通常の XXZ モデルでは２次元表現でトレースをとるが、それに当たるのは量子トロイダル代数の場合フォック表現である。後者は頂点作用素による具体的な実現があるのでそれを利用してトレースの計算を実行する。
(2) Q 作用素の構成：可解格子模型の理論で基本的な Baxter の Q 作用素は BLZ の研究でも重要な役割を果たす。Q 作用素の表現論的な構成は g=sl2 の量子アフィン代数の場合に BLZ が初めて与えた。この構成を量子トロイダル代数に拡張する。鍵となるのはボレル部分代数の表現論を整備し、特別な役割を果たす加群(sl2 の場合に BLZ が用いた oscillator 表現に当たるもの)を構成することにある。
研究実施にあたっては, 各年度にそれぞれ１ヶ月程度 B. Feigin (HSE 教授), T.Miwa (京都大学教授), E. Mukhin(Indianapolis 大学准教授)と集中的な共同研究をおこなって進めた。

４．研究成果

本研究で得られた成果は以下の通りである。

(1) IM の q 変形の構成(論文②)： gln 型量子トロイダル代数 En の普遍 R 行列からフォック表現上のトレースをとって転送行列を定義する。フォック表現の頂点作用素による実現(Y.Saito, 1999)を用いることにより、そのテイラー係数について En の生成カレントの多重積分による具体的表示を得た。これらの作用素は緩やかな条件をみたす加群上で定義される。特にそれらを En のフォック表現上に作用させたものは上述の Feigin et al. (2007)の non-local IM に一致する（正確にはゼロモードの作り方が異なっているが、IM はゼロモードを固定した部分空間上の作用素として同一視ができる)。また E1 型の non-local IM をフォック表現の n 個のテンソル積に作用させたものは Feigin et al.の local IM に一致する。

(2) (glm,gln)双対性（論文①)：R 行列がみたす Yang-Baxter 方程式により、上記の構成法で定められた non-local IM どうしは自明に可換となる。他方 local IM と non-local IM との可換性は非自明な事実であり、これは(gl1,gln)双対性として理解することができる。本研究ではより一般に次のような加群 Fmn を構成した。
   ① Fmn には glm 型量子アフィン代数がレベル n で作用する,
   ② 同時に Fmn には gln 型量子アフィン代数がレベル m で作用する,
   ③ これらの作用は互いに可換である,
   ④ それぞれの作用は glm 型および gln 型の量子トロイダル代数の作用に拡張できる,
   ⑤ 量子トロイダル代数の作用は可換でないが、パラメータを適当に同一視するとそれらから作られた IM は互いに可換となる。

   以上の双対性は Yangian の場合に知られている(glm,gln)双対性(Mukhin-Tarasov-Varchenko 2004--2006)の量子トロイダル版とみなせる。

(3) スペクトル問題(論文③,④)：可解格子模型で標準的に用いられる Baxer の TQ 関係式の方法を拡張し、local IM の固有値について以下のような記述を得た。gl1 型代数 E1 のフォック表現の n 個のテンソル積を W とすると、次の性質を持つ W 上の作用素 T(u),Q(u)が存在する：
   ① T(u),Q(u)は互いに可換,
   ② W の各ベクトル上で T(u),Q(u)は 1/u の多項式,
   ③ $T(u)Q(u)=a(u)Q(q1u)Q(q2u)Q(q3u)+d(u)Q(u/q1)Q(u/q2)Q(u/q3)$.
   ただし a(u),d(u)は既知の多項式, q1,q2,q3 は代数 E1 のパラメータである。

   これより Q(u)の固有値の根に対するベーテ方程式が導かれ、local IM の固有値はそれら根の対称多項式で表される。通常の TQ 関係式と比較すると、③は Q(u)について非線形であること、また上記 T(u)はベーテ方程式を導くための補助的な量であって IM の母関数としての転送行列と異なっていること、が特徴である。

   これらの主張の証明のため、E1 のボレル部分代数の最高ウエイト表現と q character の理論を整備した。特別な表現 M(u),N(u)であって、Grothendiek 環において TQ 関係式③に対応する関係式が成立するようなものを構成することが鍵になる。

   これらの加群の構成は量子アフィン代数の場合にも同様に行うことができる(論文④)

(4) コセット共形場理論の q 変形：量子 KdV 系の場合、Oper は合流超幾何作用素を主要部とし、それに見かけの特異点を付け加えて摂動をした形になっている。これに対し Bazhanov-Lukyanov(2013)はコセット共形場理論(sl2)_{k1} x (sl2)_{k2}/(sl2)_{k1+k2} (k1,k2 は generic なパラメタ)を考察し、対応する Oper がガウスの超幾何作用素の摂動となることを示した。この理論は量子 KdV 系よりも基本的な重要性を持つと考えられる。本研究ではその q 変形を試み、３組の量子トロイダル代数 E1 からスクリーニング作用素と non-local IM を構成した。

(5) evaluation 表現とその応用：A 型量子アフィン代数 Uq sl ^ n の場合には有限型代数 Uqsln への全射(evaluation map)が存在する。そのトロイダル版は Miki(1999)によって与えられた。本研究ではその応用として Uqgln の Gelfand-Zeitlin 表現を量子アフィン代数に誘導し、evaluation map で量子トロイダル代数へ引き戻した表現を考察した。代数 En の完備化の中には fusion と言われる操作によって互いに可換な E1 の n 個のコピーを構成することができる。上記の誘導表現をこの部分代数に制限した時の分岐則を決定し最高ウエイトを与えた。

上記(4),(5)の結果は論文にまとめ投稿中である。

以上により、Feigin et al.(2007) において「手で」構成されていた IM の q 変形の出自が明らかになるとともに、固有値問題について成果を上げることができた。本研究の TQ 関係式は、共形場理論の極限において Litvinov が提出した予想の証明にもなっている。先述のように量子トロイダル代数は現在活発に研究されているテーマであり、国際会議でこれらの結果を発表した際には手応えを感じることが度々あった。この分野で一定のインパクトを与えることができたと考えている。今後は ODE/IM 対応の解明が課題である。(4)の研究はその端緒となることを期待している。そのためにはまた A 型以外の代数に対する local IM の構成に取り組む必要がある。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　5　件）

① B.Feigin, M.Jimbo and E.Mukhin, The (gl_m,gl_n) duality in the quantum toroidal setting, Commun. Math. Phys., 査読有, 367, 2019, pp.455–481
DOI 10.1007/s00220-019-03405-8

② B.Feigin, M.Jimbo and E.Mukhin, Integrals of motion from quantum toroidal algebras, J.Phys.A: Math. Theor., 査読有, 50, 2017, pp.464001
DOI 10.1088/1751-8121/aa8e92

③ B.Feigin, M.Jimbo, T.Miwa and E.Mukhin, Finite-type modules and Bethe Ansatz equations, Annales Henri Poincare, 査読有, 18, 2017, pp.2543--2579
DOI 10.1007/s00023-017-0577-y

④ B.Feigin, M.Jimbo, T.Miwa and E.Mukhin, Finite type modules and Bethe Ansatz for quantum toroidal gl_1, Commun. Math. Phys., 査読有, 355, 2017, pp.1--43
DOI 10.1007/s00220-017-2984-9

〔学会発表〕（計　8　件）

① 神保道夫,トロイダル量子群と可積分系,日本数学会年会企画特別講演, 東京工業大学（東京都）, 2019 年 3 月 20 日

② Michio Jimbo, Toroidal symmetry in quantum integrable systems, workshop “Correlation Functions of Quantum Integrable Systems and Beyond”, 2017 年 10 月 23 日 --26 日, ENS Lyon (Lyon, France)

③ Michio Jimbo, Integrals of motion from quantum toroidal algebras, The XXVth International Conference on Integrable Systems and Quantum Symmetries, 2017 年 6 月 6 日 --10 日, Czech Technical University (Prague, Czech)

④ Michio Jimbo, Finite type modules and Bethe Ansatz for quantum toroidal gl_1, workshop “Recent Advances in Quantum Integrable Systems”,Geneve 大学, (Geneve, Switzerland), 2016 年 8 月 24 日

６．研究組織