

令和 5 年 6 月 8 日現在

機関番号：32686

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2022

課題番号：16K05184

研究課題名(和文) 諸分野に現れるタウ関数の構造

研究課題名(英文) Structure of tau-functions in various topics

研究代表者

梶 三郎 (Takei, Saburo)

立教大学・理学部・教授

研究者番号：60318798

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、可積分系の研究において導入された「タウ関数」という視点を広げるとともに、その概念と諸分野との関連を考察することで、可積分系の世界をさらに広げていくことを目標とした。得られた研究成果として、以下のものが挙げられる：(1) GUE型アンサンブルについての最大固有値分布関数と Painleve IV型方程式との関係についての、「広田の直接法」の立場からの別証明 (2) sl₂型の"rigged configurations" のソリトン・オートマトンによる記述 (3) 格子KdV方程式、格子ブシネスク方程式と戸田階層との関係の解明 (4) 格子ソリトン方程式の代数幾何的タウ関数の構成。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ソリトン方程式の研究において、「タウ関数」という用語はいくつかの異なる意味で用いられてきた。非線形方程式を、いわゆる「広田型」の双線形方程式に書き直す際に現れる従属変数の意味で「タウ関数」という用語が用いられることが多いが、それだと数学的に精密な定義とはなっていない。一方、KP階層、戸田階層というクラスのソリトン方程式については、対応するタウ関数を(定数倍を除いて)一意に定めることができ、その意味で数学的に厳密な定義となっている。本研究では、特に戸田階層の意味でのタウ関数に注目して、その概念と諸分野との関係を中心とした研究を行い、新たな結びつきを見出すことができた。

研究成果の概要(英文)：The aim of this study was to expand the perspective of the "tau function" introduced in the study of integrable systems, and to explore its relationship with various fields in order to expand the world of integrable systems. The following results were obtained: (1) An alternative proof from the viewpoint of "Hirota's direct method" regarding the relationship between the maximum eigenvalue distribution function of the GUE-type ensemble and the Painleve IV equation. (2) Description of "rigged configurations" of sl₂ type using soliton automata. (3) Relationship between the lattice KdV equation, lattice Boussinesq equation, and Toda hierarchy. (4) Construction of algebraic-geometric tau functions of the lattice soliton equation.

研究分野：可積分系

キーワード：可積分系 ソリトン 数理物理学 特殊関数

1. 研究開始当初の背景

佐藤・三輪・神保のホロノミック量子場の研究[1]において導入された「タウ関数」の概念は、場の量子論に起源を持つ。その後、ソリトン研究における「広田の直接法」[2]と結びつき、大きく発展した。「広田の直接法」では、非線形偏微分方程式に対して適当な変数変換を行うことで、いわゆる“広田型”の微分方程式(従属変数について2次斉次の方程式)に書き直すことが出発点となる。ソリトン研究において、ある関数が広田型の微分方程式を満たすときに、その関数を「タウ関数」と呼ぶ論文も多いが、それだと数学的に厳密な定義ではない。すなわち、ある方程式を広田型に書き直す方法は一意ではなく、大きな自由度が残る。これに対し、線形常微分方程式のモノドロミー保存変形理論の場合は、方程式のハミルトニアン構造を利用して、タウ関数に対する明確な特徴づけがなされている。また、ソリトン理論においても、単独のソリトン方程式(例えば KdV 方程式)のみを考えるのではなく、高次の可換時間発展の族を同時に考えて“階層”として捉えることで、タウ関数を(定数倍程度の不定性で)特徴づけることができる。

一方、上述のような厳密な意味での「タウ関数」は、様々な関連分野に現れることが知られている。古くはイジング模型の相関関数が典型的な例であり、パンルヴェ III 型方程式のタウ関数と見なせる。さらには、2次元量子重力の分配関数に関する Witten-Kontsevich 理論、ランダム行列の最大固有値分布に関する Tracy-Widom 理論などの例があげられる。前者は KdV 階層、後者はパンルヴェ II 型方程式のタウ関数の例を与えている。これらの例については、近年でも関連する研究が進められている。

2. 研究の目的

上述のように、本研究では、非線形方程式に対して、単に「広田型に書き直す」、「行列式型の解を求める」ということのみを目的とするのではなく、KP 階層、戸田階層等といった、数学的位置付けが明確なタウ関数との関係を解明することを目的としている。様々な分野に現れる「タウ関数」的な構造に対して、なんらかの意味での数学的特徴づけを持った「タウ関数」との結びつきを調べることによって相互の関係を理解し、さらなる拡張を行うことまでを目標として研究を行った。

3. 研究の方法

可積分系的な構造が現れる分野は数多く、焦点を絞らないと浅い結果となってしまう。そこで本研究では、応募者がこれまでに研究を行ってきた応用分野に係る題材を中心に研究を行った。具体的には、(1)行列積分とソリトン方程式、パンルヴェ方程式のタウ関数、(2)組合せ論と離散・超離散ソリトン方程式との関係、(3)離散ソリトン方程式の代数幾何学的タウ関数、などといったテーマを中心に研究を行った。また、さらに応用の範囲を広げるべく、上記のテーマと関連する話題について、必ずしも現時点では可積分系との関係がはっきりしていないものについても、研究を行った。

4. 研究成果

本研究での中心的なテーマは上記の(1)~(4)であった。まずはそれらに関する研究成果を述べていく。

(1) 行列積分とソリトン方程式との関係について、ガウス型ユニタリアンサンプルに対する行列積分とパンルヴェ IV 型方程式との関係についての Tracy-Widom の結果に対して、「広田の直接法」の立場からの別証明を与えた。ここに現れる行列積分は、「広田の直接法」の研究者の間ではよく知られた、非線形シュレディンガー方程式の“2方向ロンスキアン解”と結びつけることができ、2成分 KP 階層のタウ関数の特別な場合とみなすことができる。そこに相似簡約の手法を適用することで、パンルヴェ IV 型方程式との結びつきが、広田の直接法の立場から関係に説明することができた。また、2方向ロンスキアン解として表すことで、行列積分で表されるタウ関数の漸近挙動についても、初頭的に記述することができた。現在まではガウス型ユニタリアンサンプルに対する行列積分とパンルヴェ IV 型方程式についての結果が得られているのみであるが、これを他のアンサンプルに対する行列積分に拡張することで、より広い範囲での応用が期待できる。この方向に向けての一つの試みとして、3成分 KP 階層と関係する「GL(3)型 Atiyah-Ward 仮説」という手法を用いて、相似簡約を適用することで津田・鈴木によるモノドロミー保存変形型の方程式が得られるという研究を行った(足立好輝(立教大学大学院生(当時))との共同研究)。

(2) 組合せ論と離散・超離散ソリトン方程式との関係について、超離散 KdV 方程式と関連するソリトン・セルオートマトンについて、sl₂ 型艦装配位の初頭的な記述法を見出した(辻本論(京都大)、Ralph Willox(東京大)、Jonathan J.C. Nimmo(グラスゴー大))との共同研究)。また、従来の艦装配位によるフェルミ型公式の導出を拡張して、有限容量箱玉系と呼ばれるソリトン・オ

ートマトンの一種に対応する場合のフェルミ型公式を導いた。現時点では sl_2 の場合についての結果までであるが、臙装配位はより一般のルート系に対して定義されているので、その場合にも対応する初頭的記述を確立することは、今後に向けての課題と言える。

また、jeu de taquin というヤング図形の操作と、離散戸田格子との関係についても研究を行い、対応する行列式タウ関数を、格子経路の組合せ論によって記述するという研究を行った(太田泰広(神戸大)・上岡修平(京都大)との共同研究)。こちらについてはまだ最終的な段階までまとめられていないが、近日中には考察を進める予定である。このテーマについても、他のルート系に関する拡張を行う余地があり、今後も研究を継続する。

(3) 離散ソリトン方程式の代数幾何学的タウ関数については、オランダのグループによって研究されてきたタイプの格子 KdV 方程式、格子ブシネスク方程式に対して、代数幾何学的タウ関数(リーマン面に付随するテータ関数によって表示されるタウ関数)を構成することができた。用いた手法は、以前の梶原健司(九大 IMI)との共同研究で導入した“離散戸田階層”であり、そこからオランダのグループによる一連の格子ソリトン方程式が得られることを示すことができ、それに伴い、戸田階層のタウ関数との関係も確立することができた。戸田階層の代数幾何学的タウ関数については上野・高崎による研究があるが、そのアイデアから出発して離散戸田階層と結びつけることで、格子ソリトン方程式に対しても代数幾何学的タウ関数を構成した。

上記の(1)~(3)以外にも、関連する話題についての研究を行った。現時点では可積分系のタウ関数との結びつきははっきりしていないが、以下に成果を列挙する。

可解カオス系と虚数乗法

ここで言う「可解カオス系」とは、厳密解を持ち、かつ解軌道がカオス的である離散力学系のことである。厳密解が虚数乗法を持つ楕円関数で記述される場合について、新たな例を与えた(久保涼平(立教大学大学院生(当時))との共同研究)。

期間構造モデルの離散化

数理ファイナンス理論における金利の期間構造モデルにおいて、Vasicek モデル、CIR モデルなどといったアフィン型モデルでは、対応する微分方程式がリッカチ型になるため、厳密解を明示的に求めることができる。佐藤亜理沙(立教大学大学院生(当時))との共同研究では、時間を離散化したモデルについても同様の考察を行なって、広田による差分リッカチ方程式との関係を議論した。現在のところ、数理ファイナンスにおける価格式として適切な境界条件を満たす解の導出には成功していない。

交通流モデルと GKZ 超幾何関数

交通流のモデルとしての確率粒子系の研究において、モデルにおける流量と密度の関係式を導出することは重要なテーマとなる。金丸真理子(立教大学大学院生(当時))との共同研究では、Misanthrope model と呼ばれるモデルについて、GKZ 超幾何関数の理論を用いることで、流量-密度関係式を厳密に記述することに成功した。

流体力学とソリトン方程式

KdV 方程式に代表されるソリトン方程式は、水面波のモデル方程式として研究されてきた。沢田陽宏(立教大学大学院生)との共同研究では、矢嶋・及川方程式と呼ばれるソリトン方程式と表面張力重力波における長波・短波相互作用との関係を研究し、従来の理論を空間 2 次元の場合に拡張することに成功した。また、短波成分が複数ある場合についても研究を行い、空間 2 次元で多成分に拡張された矢嶋・及川方程式を導出することができている。方程式自体は既存のものと同じであるが、先行研究では二層流体における表面波と内部波との相互作用であったのに対し、一層の表面張力重力波でも同じ方程式が導出されることを具体的に示すことで、応用の幅を広げることができた。得られた方程式において、係数が特別の場合においてはソリトン型の厳密解を持つことは知られていたが、係数が一般の場合の 1 ソリトン解を具体的に書き下すことはできている。可積分系のタウ関数との関係を考察する上では、2 ソリトン解を持つのは係数がどのような場合かを調べるのが大切であり、現在その方向での研究を進めている。

上記の①~④以外にも準備的な結果は得られており、今後可積分系のタウ関数との結びつきが見出されることを期待している。

<引用文献>

- [1] 神保道夫, ホロノミック量子場, 岩波書店 (1998).
- [2] 広田良吾, 直接法による ソリトンの数理, 岩波書店 (1992).

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 6件）

| | |
|---|-------------------------------|
| 1. 著者名 Kakei Saburo | 4. 巻 54 |
| 2. 論文標題 Toda lattice hierarchy and soliton equations on square lattice | 5. 発行年 2021年 |
| 3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical | 6. 最初と最後の頁 074001 ~ 074001 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1751-8121/ab88e2 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である) | 国際共著 - |

| | |
|--|--------------------|
| 1. 著者名 Saburo Kakei, Jonathan J.C. Nimmo, Satoshi Tsujimoto, Ralph Willox | 4. 巻 3 |
| 2. 論文標題 Linearization of the box-ball system: an elementary approach | 5. 発行年 2018年 |
| 3. 雑誌名 Journal of Integrable Systems | 6. 最初と最後の頁 1-32 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/integr/xyy002 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である) | 国際共著 該当する |

| | |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名 佐藤亜理沙, 寛三郎 | 4. 巻 28A0-S6 |
| 2. 論文標題 期間構造モデルの離散化の試み | 5. 発行年 2017年 |
| 3. 雑誌名 応用力学研究所研究集会報告 | 6. 最初と最後の頁 119-124 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.15017/1832820 | 査読の有無 無 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である) | 国際共著 - |

| | |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名 足立好輝, 寛三郎 | 4. 巻 28A0-S6 |
| 2. 論文標題 GL(3)型 Atiyah-Ward 仮説とモノドロミー保存変形 | 5. 発行年 2017年 |
| 3. 雑誌名 応用力学研究所研究集会報告 | 6. 最初と最後の頁 125-132 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.15017/1832821 | 査読の有無 無 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である) | 国際共著 - |

| | |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名 久保涼平, 寛三郎 | 4. 巻 28A0-S6 |
| 2. 論文標題 超幾何関数で表される不変量を持つ差分方程式の楕円関数解 | 5. 発行年 2017年 |
| 3. 雑誌名 応用力学研究所研究集会報告 | 6. 最初と最後の頁 133-138 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.15017/1832822 | 査読の有無 無 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている (また, その予定である) | 国際共著 - |

| | |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名 Saburo Kakei | 4. 巻 7 |
| 2. 論文標題 Hirota bilinear approach to GUE, NLS, and Painleve IV | 5. 発行年 2016年 |
| 3. 雑誌名 Nonlinear Theory and Its Applications (NOLTA), IEICE | 6. 最初と最後の頁 324-337 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1587/nolta.7.324 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている (また, その予定である) | 国際共著 - |

〔学会発表〕 計15件 (うち招待講演 2件 / うち国際学会 4件)

| |
|---|
| 1. 発表者名 寛三郎 |
| 2. 発表標題 格子ソリトン方程式と戸田階層 |
| 3. 学会等名 RIMS 共同研究 (公開型) 「可積分系数理の諸相」 (招待講演) |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 寛三郎 |
| 2. 発表標題 格子ソリトン方程式と戸田階層 |
| 3. 学会等名 ワークショップ 「可積分系研究の最近の進展 -理論, シミュレーション, 応用- |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|---------------------------|
| 1. 発表者名 寛三郎 |
| 2. 発表標題 格子ソリトン方程式と戸田階層 |
| 3. 学会等名 日本数学会 秋季総合分科会 |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Saburo Kakei |
| 2. 発表標題 Boussinesq-type lattice equations as reductions of Toda hierarchy |
| 3. 学会等名 Integrable systems, special functions and combinatorics (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Saburo Kakei |
| 2. 発表標題 Algebraic-geometric solutions of lattice soliton equations arising from Toda lattice hierarchy |
| 3. 学会等名 China-Japan Joint Workshop on Integrable Systems 2019 (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 金丸真理子, 寛三郎 |
| 2. 発表標題 Misanthrope model の流量-密度関係式の導出について |
| 3. 学会等名 九州大学応用力学研究所 共同利用研究集会, "非線形波動研究の新潮流 -理論とその応用-" |
| 4. 発表年 2017年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Saburo Kakei |
| 2. 発表標題 Schutzenberger 's Jeu de taquin as a ultra-discrete Toda system |
| 3. 学会等名 International Conference, Differential Geometry and Differential Equations:the influence of Mirror Symmetry and Physics (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2017年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 寛三郎, 上岡修平, 太田泰広 |
| 2. 発表標題 Jeu de taquin と超離散戸田方程式 |
| 3. 学会等名 日本応用数理学会 2017 年年会, 研究部会 OS, 応用可積分系 (1) |
| 4. 発表年 2017年 |

| |
|--------------------------------|
| 1. 発表者名 寛三郎, 久保涼平 |
| 2. 発表標題 擬不変量を持つ可解力オスと虚数乗法 |
| 3. 学会等名 日本数学界 2017年度秋季総合分科会 |
| 4. 発表年 2017年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Saburo Kakei |
| 2. 発表標題 Linearization of the box-ball system: an elementary approach |
| 3. 学会等名 The Fourth International Conference, Nonlinear Waves - Theory and Applications (国際学会) |
| 4. 発表年 2016年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 寛三郎・上岡修平・片山陽介・太田泰広 |
| 2. 発表標題 Jeu de taquin slide と 離散2次元戸田方程式 |
| 3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会 |
| 4. 発表年 2016年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 久保涼平・寛三郎 |
| 2. 発表標題 超幾何関数で表される不変量を持つ差分方程式の楕円関数解 |
| 3. 学会等名 応用力学研究所 共同利用研究集会 非線形波動研究の深化と展開 |
| 4. 発表年 2016年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 足立好輝・寛三郎 |
| 2. 発表標題 GL(3)型 Atiyah-Ward 仮説とモノドロミー保存変形 |
| 3. 学会等名 応用力学研究所 共同利用研究集会 非線形波動研究の深化と展開 |
| 4. 発表年 2016年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 佐藤亜理紗・寛三郎 |
| 2. 発表標題 期間構造モデルの離散化の試み |
| 3. 学会等名 応用力学研究所 共同利用研究集会 非線形波動研究の深化と展開 |
| 4. 発表年 2016年 |

| |
|----------------------------------|
| 1. 発表者名 久保涼平・寛三郎 |
| 2. 発表標題 擬不変量を持つ可解カオスと虚数乗法 |
| 3. 学会等名 応用数理学会 第13回 研究部会連合発表会 |
| 4. 発表年 2017年 |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

| |
|--|
| researchmap https://researchmap.jp/read0074633 researchmap https://researchmap.jp/read0074633 |
|--|

| 6. 研究組織 | | |
|---------------------------|-----------------------|----|
| 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
| | | |

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

| | |
|--------------------------------|--------------------|
| 国際研究集会 RIKKYO MathPhys 2018 | 開催年 2018年～2018年 |
|--------------------------------|--------------------|

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| | |
|---------|---------|
| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|