

令和元年6月10日現在

機関番号：57301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05187

研究課題名(和文)アーベル関数論の可積分系への応用

研究課題名(英文)Application of Abelian function theory to Integrable system

研究代表者

松谷 茂樹 (Matsutani, Shigeki)

佐世保工業高等専門学校・一般科目・教授

研究者番号：30758090

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：次の成果を得た：(1)非対称数値半群をWeierstrass非空隙列に持つWeierstrass正規形式でのリーマン定数の決定。(2)一般のWeierstrass正規形式に対するJacobiの逆公式の決定。(3)戸田格子方程式の種数 $g$ の擬周期解と $2N$ 周期解との対応と曲線の被覆の関係の明示化。(4)種数3の巡回型3次曲線の曲線の退化に対する関数との振る舞いの決定。(5)弾性曲線の一般化としてのMKdV階層とFaber多項式との関係の明確化。(6)異分野との融合に関わる研究の推進(量子ウォークと光学・グラフ理論と炭素の電気伝導・ロボティクスとリー群での経路空間・結晶のらせん転位の代数的表現)

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は、数学以外の分野への応用を見据えて、アーベル関数を楕円関数と同レベルの具体性を持つように再構築し、その再構築の結果と可積分系を通して他分野へアーベル関数論を適用することを目指すものである。また、適用に向け、幅広い数学の異分野への応用も含め、数学が社会に役立つ事を示すことは重要である。上記成果は、このような方向性に沿った結果である。

研究成果の概要(英文)：We have the following results: 1) The determination of the Riemann constant for every algebraic curve which is given by the Weierstrass normal form even with non-symmetric numerical semigroup as Weierstrass non-gap at its infinity, 2) Jacobi inversion formulae for a general Weierstrass normal form, 3) Clarification of the relation between covering of the curve and correspondence of the hyperelliptic quasi-periodic solution to periodic solution of the Toda lattice equation, 4) Formulation of the behavior of sigma function for a degeneration of trigonal cyclic curve, 5) Relation of the MKdV hierarchy of the isometric deformation of curve in a plane and the Faber polynomial, and 6) Applications of mathematics to other fields (Quantum walk and coloring, Graph zeta function and conductivity of carbon, path space of the Lie group and robotics, algebraic description of screw dislocation)

研究分野：可積分系

キーワード：代数曲線 アーベル関数 関数 可積分系 産業数理

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

本申請者は、20年来、産業界の現場(キヤノン(株)数理工学研究部)において製品開発に関わる数理解析に携わり、純粋数学を含む数学の産業界での有用性について強く認識してきた。日本が国際競争力を保つためには、基礎数学の有用性がより高まっている事を痛感し、27年4月より、数学の産業界への応用を目指した教育・研究に従事するため佐世保工業高等専門学校に教授に転身した。

Weierstrass の関数を中心として、楕円関数論は抽象性と具体性との両方を保持しているため、物理学や整数論をはじめとして、諸科学に厳密で、数学的深みをもった応用が出来る。他方、種数が2以上の代数曲線にはそのような高度な理論体系が存在していない。そのため、高種数の代数曲線を応用した研究が十分に成熟していない。

D. Mumford は「Tata Lecture of Theta II」(1982)(以下、Tata II)において、非線型可積分偏微分方程式(以下可積分方程式)である Kortoweg-de Vries (KdV) 方程式、Neumann 方程式、sine-Gordon 方程式等の超楕円曲線解の具体的構築を目指し、19世紀の数学(特にヤコビの方法)を現代代数幾何の枠組みで捉え直すことで、それらの可積分方程式の超楕円曲線のアーベル関数解を、楕円関数と同様の具体性を持つように記述する方法を提示した。Tata II では、Mumford は次の研究方針(以下 Mumford プログラムと呼ぶ)に従った。

Mumford プログラム:『超楕円曲線上のアーベル関数の応用に向け、以下の3つを繰り返す:

- (1) 超楕円曲線でのヤコビの逆問題の精緻化
  - (2) 超楕円曲線でのアーベル関数、関数の代数構造及び微分構造の解明
  - (3) (1)、(2)の知見の可積分方程式への適用、及び(1)、(2)へのフィードバック』
- ヤコビの逆問題とは曲線上のアーベル関数とリーマン関数との関数を提示することである。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、「種数1の代数曲線である楕円曲線のアーベル関数(楕円関数)が工学、理学の様々な分野で活躍し科学、科学技術を発展させたように、アーベル関数の関数論を応用に向けて再構築することで、アーベル関数を諸科学、諸科学技術の発展につなげる」ことである。

### 3. 研究の方法

複素代数曲線(=閉リーマン面)に関わるアーベル関数の関数論の応用に向けた再構築と、再構築した理論の非線型可積分偏微分方程式への応用を目標とし、背景研究である「Tata Lecture of Theta II」(1982)で D. Mumford が実施した研究プログラムを拡張し、そのプログラムに従って目標の達成を目指す。特に28年度~30年度は、空間曲線への拡張と、それによる曲線のモジュライ空間の幾何構造の解明と、更にその戸田方程式への応用をターゲットとする。

また、これに関連して、異分野との連携に関わる研究も実施してきた。

### 4. 研究成果

- (1) 非対称数値半群を Weierstrass 非空隙列に持つ Weierstrass 正規形式で得られる曲線に対するリーマン定数の決定。
- (2) 一般の Weierstrass 正規形式に対する Jacobi の逆公式の決定
- (3) 戸田格子方程式の解空間における種数  $g$  の擬周期解と  $2N$  周期解との対応と、曲線の被覆の関係についての観察結果
- (4) 種数3の巡回型3次曲線の曲線の退化に対する関数との振る舞いの決定
- (5) 弾性曲線( *elastica* )の一般化としての mKdV 階層と Faber 多項式との関係を明確にした。
- (6) 異分野との融合に関わる研究として、量子ウォークと光学の関係や、グラフ理論と炭素の電気伝導に関わる結果や、ロボティクスにおける幾何学的拘束方法のリー群での経路空間による考察、結晶のらせん転位の代数的表現方法に関する研究と行ってきた。

### 5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計7件)

1. J. Komeda, S. Matsutani and E. Previato "The sigma function for trigonal cyclic curves", Lett. Math. Phys. 109 2 (2019), 423-447.
2. H. Hamada, S. Matsutani, J. Nakagawa, O. Saeki and M. Uesaka, "An algebraic description of screw dislocations in SC and BCC crystal lattices", Pacific J. Math. Industry 10 (2018) 10:3
3. H. Hamada, S. Makita and S. Matsutani, "Mathematics in Caging of Robotics", J. Geom. Symm. Phys. 44 (2017) 55-66.
4. S. Matsutani and I. Sato, "A novel conductivity mechanism of highly disordered carbon systems based on an investigation of graph zeta function", Phys. Lett. A 381 (2017) 3107-3111
5. Y. Ide, N. Konno, S. Matsutani and H. Mitsuhashi, "New theory of diffusive and coherent nature of optical wave via a quantum walk", Ann. Phys. 383 (2017) 164-180.
6. S. Matsutani and E. Previato, "From Euler's elastica to the mKdV hierarchy through the Faber polynomials", J. Math. Phys. 57 (2016) 081519.
7. J. Komeda, S. Matsutani and E. Previato, "The Riemann constant for a non-symmetric Weierstrass semigroup", Archiv der Math. 107 (2016), Issue 5, pp 499-509.

〔学会発表〕(計 10 件)

1. 松谷茂樹, “代数曲線のアーベル函数論の再構築と巡回型 3 次曲線の退化について” 研究会「幾何, 数理物理, そして量子論」 静岡大学理学部 2019 年 3 月 5 日-7 日
2. 松谷茂樹, 米田二良, Emma Previato, “Jacobi inversion formulae for a compact Riemann surface via Weierstrass normal form”, 日本数学会 函数論 岡山大学 2018 年 9 月 23 日-25 日
3. 松谷茂樹, 米田二良, Emma Previato, “On  $\sigma$  function for the curve,  $y^3 = x(x-s)(x-b_1)(x-b_2)$  and its limit of  $s \rightarrow 0$ ”, 日本数学会 函数論 岡山大学 2018 年 9 月 23 日-25 日
4. 松谷茂樹, “超楕円 関数による戸田格子の周期解と擬周期解について”, 可積分系理論から見える数理構造とその応用 京都大学 数理解析研究所 2018 年 9 月 5 日-7 日
5. S. Matsutani, “Abelian functions of a curve given by Weierstrass normal form: Jacobi inversion formulae and sigma of singular curves”, Workshop: Algebraic Curves, Integrable Systems, and Cryptography, National University of Kyiv-Mohyla Academy 2018 年 8 月 23 日-24 日
6. S. Matsutani, “Sigma function of  $y^3 = x^2(x-b_1)(x-b_2)$ ”, Branched Covering, Degeneration and Related Topics 2018 広島大学大学院理学研究科 2018 年 3 月 5 日(月)
7. 松谷茂樹, “Euler-Bernoulli の弾性曲線(elastica) とその一般化: 楕円関数の萌芽からアーベル関数論の再構築へ”, 日本数学会代数幾何 特別講演 山形大学 2017 年 9 月 14 日
8. 弾性曲線の統計力学: オイラーのエラスティカを超えて, 研究会「第 24 回 沼津研究会 幾何, 数理物理, そして量子論力学」(招待講演) 沼津工業高等専門学校 2017 年 3 月 7 日
9. 松谷茂樹, 米田二良, Emma Previato, “Jacobi inversion formulae for a trigonal curve  $y^3 = x^2k(x)$ ”, 日本数学会 函数論 関西大学 2016 年 9 月 16 日
10. 松谷茂樹, “MKdV-flow and Statistical Mechanics of Elastica”, 応用数理学会 応用可積分系, 北九州国際会議場 2016 年 9 月 13 日

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年:  
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年:  
国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名:

ローマ字氏名:

所属研究機関名:

部局名:

職名：

研究者番号（8桁）：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：米田二良

ローマ字氏名：Jiryo Komeda

研究協力者氏名：Emma Previato

ローマ字氏名：Emma Previato

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。