

令和元年6月20日現在

機関番号：13301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05194

研究課題名(和文) 値分布論をモデルとした複素関数論の超離散的関数論への変換と諸分野への応用

研究課題名(英文) The adaptation of complex function theory to ultradiscrete function theory modeled on value distribution theories and its application to various fields

研究代表者

藤解 和也 (Tohge, Kazuya)

金沢大学・電子情報通信学系・教授

研究者番号：30260558

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：超離散一次分数変換を差分作用素とした有界開区間上のトロピカル値分布論の確立などLaine, Korhonen, Heittokangas, Y-Y. Zhengと複素関数方程式についての知見を得、Gundersen, Steinmetzと共同して有理型関数の5対複素数共有に関する未解決問題を肯定的に解決した。石崎, Wen, Li, J-H. Zhengも加わり指数関数多項式の零点分布、差分版radicalによるMason's theoremの類似、有理型関数の差分商評価の精密化で最良の評価を導いた。更にLinと値の共有概念の差分化に関しても最良の結果を得るなど当初目的に叶う研究成果を上げた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

「差分による微分の代替可能性」を調べるべく有理型関数を対象にシフト作用素に関する結果を導き、微分作用素による場合と平行な推論を用いて証明した。また区分的線型な連続関数がmax-plus級数を持つことを利用して用語・推論共に機械的な「翻訳」により応用上有益な複素解析的な場合と殆ど同等な結果を再現した。これらは誤解を恐れずに表現すれば「ジェネリック薬品」的な成果で、更なる進展により学術的意義と社会的意義が更に高まると期待する。

研究成果の概要(英文)：Laine and I have set up the tropical value distribution theory on a finite open interval by means of an ultradiscrete linear fractional transformation as shift, while some results from function theory have been tropicalized together with Liu. Collaborating with Laine, Korhonen, Heittokangas and Y-Y. Zhang, we have made a progress on complex functional equations, while it was the joint work with Gundersen and Steinmetz to have settled an open problem on the uniqueness of two meromorphic functions sharing five pairs of values affirmatively. Furthermore, we invited Ishizaki, Wen, Li and J-H. Zheng and studied the zero distribution of exponential polynomials, an analogue of Mason's theorem with differential radical and a refinement of the estimate of difference ratio of meromorphic functions each of which provides the best possible result in a certain sense. Finally, Lin and I studied the difference counterpart of sharing values jointly and obtained a sharp result concerning this concept.

研究分野：複素解析

キーワード：トロピカル・ネバンリンナ理論 超離散方程式 複素差分方程式 複素線型微分方程式 超越有理型関数 Mason's theorem exponential polynomial 国際研究者交流

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

本申請課題は、方程式の可積分性を値分布論的な性質、つまり位数が有限な有理型函数解を十分に豊富に有するという性質により捉える考え方を起源としている。M.J. Ablowitz, R.G. Halburd and B. Herbst は 2000 年に差分方程式に関してこの考えを提案し、差分版の値分布論が研究される契機とした。Halburd はさらに N. J. Southall との共同研究(2009)に於いて実 1 変数の超離散的な関数に対する値分布論の可能性を提案した。I. Laine と申請者は 2011 年に Proc. London Math. Soc. で発表した論文に於いてその理論が成立し得る最大の族はどのようなものかを見出し、その値分布論を完成させた。この考察では可積分な複素差分方程式に対応する超離散的な可積分方程式の発見が重要であった。さらに申請者が R. Halburd, R. Korhonen との共著論文 (2014, Trans. AMS) で完成した複素解析における Nevanlinna-Cartan 理論の「差分版」が不可欠であった。これは、微分方程式を超離散化する際には常に差分方程式または離散方程式を経由することに対応している。磯島伸, 太田泰弘, 梶原健司, 高橋大輔, 時弘哲治, 野海正俊, 野辺厚氏, 増田哲, 山田泰彦を初め非常に多く日本人研究者の貢献が著しい研究成果からも分かるように、q-差分化と超離散化の読み替え規則が確認できていた。この課題研究に先立って出版した Korhonen, Laine との共著 Tropical Value Distribution Theory and Ultra-Discrete Equations. World Scientific Publishing Company, 280pp, 2015 で当該分野の研究の可能性を確信して研究を開始した。例えば、2014 年に発表した論文では、べき級数で定義される整函数と max-plus 級数により与えられる超離散的な凸関数の増大度の関係がきちんと対応すること、上記の著書では、複素函数と超離散的な関数に対する各値分布論に完全な「辞書」が構成できることが見出せていた。

### 2. 研究の目的

本申請の目的は、値分布論に関して上記のような辞書が得られた過程を精査し、以下の対象に対して複素函数論に対応した手法が得られることを明らかにすることであった。

(1) 複素解析的な可積分方程式の超離散化として既知の方程式を対象に、その局所的な解の存在を調べ、複素解析的な解表示が得られている方程式に対応する超離散方程式の解についても同様な表示が得られることを示す。これは複素函数論で得られる評価に対する極値函数の多くが指数函数や三角函数など微分方程式の解として明解な級数表示を持つものであり、超離散方程式を通して逆に対応する評価を導く試みとも言え、今回はその具体的なモデルを構成する。

(2) 複素解析函数の族に対して合成作用素が閉じているように、超離散的な関数族にも反復合成は適切に作用する。このことから複素力学系、特に超越整函数の反復合成に関する研究成果を、超離散的な関数の離散力学系でも同様に成立する主張とそうでないものに分類し、各特徴を明らかにする。複素力学系に現れる不変量の再現可否とその意味の解釈とを明らかにする。

(3) 単位円板内の解析函数族が持つ性質が、どのような区間で定義された超離散的な関数族に対して変換できるかを明らかにする。特に、Bieberbach 予想などで認知された単葉関数の係数問題に類似する問題がどのような超離散的関数族に対して考察が可能かを明らかにする。

本質的に、一般に解析函数のべき級数表示を通して複素解析的な手法が数論を初め多くの分野に応用されているという事実から、max-plus の意味での無限級数表示を母関数の代替物とし、本質的に類似する議論を進めていけば全く同じ主張とはならないまでも、未知のしかしながら既知の結果と十分に対比が可能で主張が導出できると期待した。さらに、Diophantus 近似と Nevanlinna 理論に「辞書」が存在することを示した P. Vojta の以下の問いに答えるための何かしらの方向性を見出すことを目的とした。「By definition, a function is holomorphic if it has a derivative, and this derivative plays a central role in Nevanlinna theory. In number theory, what should correspond to the derivative? 」

### 3. 研究の方法

複素解析的手法の有益性を再確認した上で、それを保証している解析性の基づく諸性質を max-plus 級数展開を利用した議論に置き換えたとしたらどうなるかについて検証することから研究を開始した。つまり、べき級数が定義する複素函数の性質を max-plus 級数とそれが定義する超離散的な関数の性質に翻訳することを試みた。Laine, Korhonen 両教授や中国人研究者からなる研究グループと共同して超離散方程式に対する値分布論を用いた可積分条件の導出とその解表示のためのアルゴリズム研究、それと並行して Heittokangas 博士や石崎教授を加えた複素微分方程式の解に対する値分布論的手法の精密化とその超離散化を中心課題として研究を進めて行った。本来は、目的(2)(3)で掲げた幾何学的函数論に関して国内の研究者と研究を進めることも計画していたが、初期の研究に於いてこれらの超離散化への障壁として長さや面積などの計量に関する問題に直面したことから方向の転換が求められることになった。そのため複素函数に関する一意性問題の超離散化を目指す新たなターゲットに定めて研究計画を練り直した。

### 4. 研究成果

まず Laine 名誉教授と Kai Liu 氏との共同研究により複素函数論のいくつかの結果について超離散化が可能であることを証明した。また University of Eastern Finland のグループ (Laine 名誉教授、Korhonen 教授、Heittokangas 准教授、Yueyang Zhang 氏) と複素差分及び微分方程

式に関する多様な知見を得た他、Gundersen 教授(University of New Orleans)と Steinmetz 名誉教授(TU Dortmund)と共同して有理型函数の 5 対複素数共有に関する未解決問題を肯定的に解決した。連携研究者の石崎克也教授(放送大学)、Wen 准教授(Taiyuan University of Technology)、Li 講師(University of Jinan)、Zheng 教授(Tsinghua University)が加わり、指数函数の多項式の零点分布、差分版の radical を用いた Mason's theorem の類似、有理型函数の差分商に関する評価の精密化に於いてそれぞれ最良の評価を導いた。更に Wei-Chuan Lin 教授(Fujian Normal University)と共有概念の差分化に関しても最良の結果を得て当初目的に叶う研究成果を上げた。これらは複素函数と超離散関数の諸性質の比較やその比較を可能にする特徴的な複素函数としての指数函数あるいはその多項式に関するこれまでにない観点からの研究成果である。例えば、Mason-Stothers の定理の差分版が与えられた論文では、微分作用素を用いて得られる評価の何れもが差分作用素を用いて再現でき、特にその最良な評価を与える極値関数達もまた同様に構成できることを示し、その意味で Vojta の問いについては少なくとも derivative に限らず difference の対応物も考察の対象とすべきであることを提案している。更に、Diophantus 近似と Nevanlinna 理論の間の「失われた輪」を見出すべく研究を始めたトロピカル版 Nevanlinna 理論について、複素平面上の円板のみを定義域とする有理型函数に関する値分布理論の対応物となる有界開区間上でのみ定義された(無限に振動する)区分的線型な連続関数について「双曲的差分」としての超離散一次分数変換を差分作用素としたトロピカル値分布論を Laine 名誉教授との共同研究により確立した。これらトロピカルな値分布理論たちは、対象となる関数が微分可能ではないが特別な級数展開を持つという意味において、derivative-free の Diophantus 近似と複素解析学の対象である Nevanlinna 理論の仲立ちとなっている。複素解析学に於いても少なくとも値分布論的な観点から差分作用素の有用性が確認され、それが直接に超離散化された経緯を踏まえれば、本研究課題で得られた有界開区間上の超離散有理型関数についての超離散双曲的差分作用素を用いた値分布理論が、まだ見つからない開円環領域あるいは開円板上の有理型函数についての双曲差分版 Nevanlinna 理論確立の可能性を高めたものと期待し、将来的な夢として hyperbolic difference の対応物が Vojta が探し求めていたものではないかを調べたいとの考えに至ったことも「成果」の一端とみなしたい思いである。

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 7 件)

1. 著者名 Lin, Weichuan; Tohge, Kazuya

2. 論文標題 Periodicity of meromorphic functions and partial sharing values

3. 雑誌名 The Houston Journal of Mathematics (to appear) 4. 巻 4X

5. 発行年 To appear

6. 最初と最後の頁 1-26

掲載論文の DOI (デジタルオブジェクト識別子)

査読の有無  査読あり  査読なし

オープンアクセス  オープンアクセスである  オープンアクセスでない

国際共著  該当する  該当しない

1. 著者名 Laine, Ilpo; Tohge, Kazuya

2. 論文標題 Tropical meromorphic functions in a finite interval.

3. 雑誌名 Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica 4. 巻 44

5. 発行年 2019

6. 最初と最後の頁 341-361

掲載論文の DOI (デジタルオブジェクト識別子) <https://doi.org/10.5186/aasfm.2019.4418>

査読の有無  査読あり  査読なし

オープンアクセス  オープンアクセスである  オープンアクセスでない

国際共著  該当する  該当しない

1. 著者名 Heittokangas, Janne; Ishizaki, Katsuya; Kazuya, Tohge; Wen Zhi-Tao

2. 論文標題 Zero distribution and division results for exponential polynomials

3. 雑誌名 The Israel Journal of Mathematics 4. 巻 227

5. 発行年 2018

6. 最初と最後の頁 397-421

掲載論文の DOI (デジタルオブジェクト識別子) <https://doi.org/10.1007/s11856-018-1738-5>

査読の有無  査読あり  査読なし

オープンアクセス  オープンアクセスである  オープンアクセスでない

国際共著  該当する  該当しない

1. 著者名 Gundersen, Gary G.; Steinmetz, Norbert; Tohge, Kazuya

2. 論文標題 Meromorphic functions that share four or five pairs of values

3. 雑誌名 Computational Methods in Function Theory 4. 巻 18  
5. 発行年 2018  
6. 最初と最後の頁 239-258  
掲載論文の DOI (デジタルオブジェクト識別子) <https://doi.org/10.1007/s40315-017-0225-z>  
査読の有無 査読あり  査読なし  
オープンアクセス  オープンアクセスである  オープンアクセスでない  
国際共著 該当する  該当しない

1. 著者名 Laine, Ilpo; Liu, Kai; Tohge, Kazuya  
2. 論文標題 Tropical variants of some complex analysis results  
3. 雑誌名 Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica 4. 巻 41  
5. 発行年 2016  
6. 最初と最後の頁 923-946  
掲載論文の DOI (デジタルオブジェクト識別子) [doi:10.5186/aasfm.2016.4159](https://doi.org/10.5186/aasfm.2016.4159)  
査読の有無 査読あり  査読なし  
オープンアクセス  オープンアクセスである  オープンアクセスでない  
国際共著 該当する  該当しない

1. 著者名 Korhonen, Risto; Li, Nan; Tohge, Kazuya  
2. 論文標題 Difference analogue of Cartan's second main theorem for slowly moving periodic targets  
3. 雑誌名 Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica 4. 巻 41  
5. 発行年 2016  
6. 最初と最後の頁 523-549  
掲載論文の DOI (デジタルオブジェクト識別子) [doi:10.5186/aasfm.2016.4131](https://doi.org/10.5186/aasfm.2016.4131)  
査読の有無 査読あり  査読なし  
オープンアクセス  オープンアクセスである  オープンアクセスでない  
国際共著 該当する  該当しない

1. 著者名 Korhonen, Risto; Tohge, Kazuya  
2. 論文標題 Second main theorem in the tropical projective space  
3. 雑誌名 Advances in Mathematics 4. 巻 298  
5. 発行年 2016  
6. 最初と最後の頁 693-725  
掲載論文の DOI (デジタルオブジェクト識別子) <https://doi.org/10.1016/j.aim.2016.05.003>  
査読の有無 査読あり  査読なし  
オープンアクセス  オープンアクセスである  オープンアクセスでない  
国際共著 該当する  該当しない

[学会発表](計7件)(うち招待講演7件/うち国際学会5件)

1. 発表者名 Kazuya Tohge  
2. 発表標題 Mason's theorem with a difference radical  
3. 学会等名 Mathematics research seminar (Joensuu, Finland)  
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 藤解和也  
2. 発表標題 Mason's theorem with a difference radical  
3. 学会等名 平成30年度 等角写像論・値分布論 研究集会  
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kazuya Tohge  
2. 発表標題 Mason's theorem with a difference radical  
3. 学会等名 The 26th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications (ICFIDCAA)  
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kazuya Tohge  
2. 発表標題 Meromorphic functions that share four or five pairs of values  
3. 学会等名 The International Conference on Computational Methods and Function Theory 2017  
4. 発表年 2017年

1 . 発表者名 Kazuya Tohge  
2 . 発表標題 Periodicity of Meromorphic Functions and Partial Sharing Values  
3 . 学会等名 University of Eastern Finland Mathematics research seminar  
4 . 発表年 2018 年

1 . 発表者名 Kazuya Tohge  
2 . 発表標題 Meromorphic functions that share four or five pairs of values  
3 . 学会等名 University of Eastern Finland Mathematics research seminar  
4 . 発表年 2017 年

1 . 発表者名 藤解和也  
2 . 発表標題 Meromorphic functions that share four or five pairs of values (joint work with Gary G. Gundersen and Norbert Steinmetz)  
3 . 学会等名 平成 28 年度 等角写像論・値分布論 研究集会  
4 . 発表年 2017 年

[ 図書 ] ( 計 0 件 )

[ 産業財産権 ]

出願状況 ( 計 0 件 )

取得状況 ( 計 0 件 )

[ その他 ]

ホームページ等

arXiv:1806.00209

<https://arxiv.org/abs/1806.00209>

Katsuya Ishizaki, Risto Korhonen, Nan Li, Kazuya Tohge

Mason's theorem with a difference radical

arXiv:1806.00210

<https://arxiv.org/abs/1806.00210>

Risto Korhonen, Kazuya Tohge, Yueyang Zhang, Jianhua Zheng,

A lemma on the difference quotients

## 6 . 研究組織

(1) 研究分担者 なし

(2) 研究協力者

研究協力者氏名 : Risto Korhonen,

所属研究機関名 : University of Eastern Finland,

部局名 : Department of Physics and Mathematics,

職名 : Professor

研究協力者氏名 : Ilpo Laine,

所属研究機関名 : University of Eastern Finland,

部局名 : Department of Mathematics,

職名 : Professor emeritus

研究協力者氏名 : Janne Heittokangas,

所属研究機関名 : University of Eastern Finland,

部局名 : Department of Physics and Mathematics,

職名 : Associate Professor

研究協力者氏名 : 石崎克也

ローマ字氏名 : Katsuya Ishizaki

所属研究機関名： 放送大学

職名：教授

研究協力者氏名：Gary G. Gundersen,  
所属研究機関名： University of New Orleans,  
部局名： Department of Mathematics,  
職名： Professor

研究協力者氏名： Norbert Steinmetz,  
所属研究機関名： Technische Universität Dortmund,  
部局名： Institut für Mathematik,  
職名： Professor emeritus

研究協力者氏名： Jian-Hua Zheng,  
所属研究機関名： Tsinghua University, P. R. China  
部局名： Department of Mathematical Sciences,  
職名： Professor

研究協力者氏名： Wei-Chuan Lin,  
所属研究機関名： Fujian Normal University, P. R. China  
部局名： Department of Mathematics,  
職名： Professor

研究協力者氏名： Zhi-Tao Wen,  
所属研究機関名： Taiyuan University of Technology, P.R. China  
部局名： Department of Mathematics,  
職名： Associate Professor

研究協力者氏名： Kai Liu,  
所属研究機関名： Nanchang University, P.R. China  
部局名： Department of Mathematics,  
職名： Associate Professor

研究協力者氏名： Nan Li,  
所属研究機関名： University of Jinan, P.R. China  
部局名： School of Mathematical Sciences,  
職名： Lecturer

研究協力者氏名： Yue-Yang Zheng,  
所属研究機関名： University of Eastern Finland,  
部局名： Department of Physics and Mathematics,  
職名： Doctor

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。