様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　３ 年　５ 月 １８ 日現在

機関番号：１３６０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2020
課題番号：１６Ｋ０５１９６

研究課題名（和文）確率偏微分方程式の解の正則性と逆問題の研究

研究課題名（英文）Regularity and inverse problems for stochastic partial differential equations

研究代表者
乙部　厳己（Otobe, Yoshiki）

信州大学・学術研究院理学系・准教授

研究者番号：３０３３４８８２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：当研究において得られた最も大きな成果は、コーシー分布に従う確率変数のパラメータ推定の問題の進展である。ガウス分布と並んで典型的な安定分布であるコーシー分布は、その分布が数学的にあまりよい性質を持たないため、不偏推定量をもとにした数学的解析は従来あまりよく知られていなかったが、当研究において数多くの性質が解明された。

研究成果の学術的意義や社会的意義
従来推定論の応用ではガウス分布が多く用いられているが、必ずしもそれは常に妥当とはいえず、コーシー分布のような除外値許容的分布の方がふさわしい場合もある。当研究によってコーシー分布が実用的問題へ応用できるようになった。また学術的にはこの研究を通じて擬算術平均をはじめとする多くの数学的成果がコーシー分布を典型例として得られた。

研究成果の概要（英文）：The largest results in this study are a progress of the inference problem for parameters of Cauchy random variables. We have established lots of theories for unbiased estimators for the distribution.

研究分野：確率解析学

キーワード：コーシー分布　パラメータ推定　擬算術平均

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

確率偏微分方程式の研究において、解を持つ条件やその解の正則性についてはかなり広い範囲で解明が進んでいる。一方で応用局面を考えると、確率偏微分方程式によってモデル化されるような現象において、あるデータがその解の観測値として得られたとき、もとの方程式の係数をどの程度正確に推定できるかということが問題となることが多い。ところがこの観点においては簡単な輸送方程式であって、雑音項がガウス型であるときに申請者によって得られた結果がわずかにあるばかりで、深く研究はなされていなかった。

２．研究の目的

背景で述べたように、確率偏微分方程式の係数を推定するような逆問題をより広汎に扱うため、雑音項を一般のレヴィ型雑音にとった場合の確率偏微分方程式の解の正則性を明らかとし、その正則性に従う妥当な観測値が与えられたときに係数を決定する逆問題を解決することを目的とした。より具体的には次の事柄を明らかとすることを目標とした。

(1) 確率偏微分方程式に加える無限次元（レヴィ型）雑音項の独立性の強度と解の正則性との関係
(2) レヴィ型雑音項を伴う確率偏微分方程式の解の具体的な表現
(3) 解から係数を構成する表式の決定
(4) その推定に対する安定性と偏微分方程式論でいう解の適切性との関係

３．研究の方法

確率偏微分方程式に対する標準的な理論の枠組みはすでに多くできあがっているが、ガウス型の積分核による具体的な表現などに根ざした理論も多く、レヴィ型雑音を取り扱うには不十分な点も残されている。そこでまずは
(1) 関数解析的な（複素）補間空間の立場に立って確率偏微分方程式の解の正則性の問題を議論し直す
ことが第一の課題であった。
さらにこれに対して逆問題を構成するには、統計学的な視点を除外するわけにはいかない。そこで
(2) より広範な安定分布に対して既存の統計学的成果を整理し、確率偏微分方程式の解に対して適用できるような表現を得る
ことが課題となる。
その後でそれらを統合して当該研究目的を達成する。

４．研究成果

確率偏微分方程式の解の正則性については、当初の予定通りに補間空間論を援用する形である程度の解の正則性に対する条件を導くことができた。

一方で、安定分布に対しては当初想定していたよりも困難な状況であった。安定分布に対しては一般論を構築することよりもまず、具体的な分布形がわかっているコーシー分布を対象として研究を開始した。コーシー分布は指数型ではなく、また可積分性を持たない。しかしながら、Xをコーシー分布に従う確率変数、$0 \leq p < 1$ として X^p は可積分である。いうまでもなく X は負の値もとるので、X^p は複素数値となる。X の位置と尺度のパラメータをそれぞれ μ と σ として、$\gamma \coloneqq \mu + i\sigma$とおくと、$E[X^p] = \gamma^p$ が成り立つ。この研究においてはこの関係を出発点としてコーシー分布に対する数理統計学的な性質の解明を行った。これらはいずれも現静岡大学理学部の岡村和樹氏、現群馬銀行の赤岡裕一氏との共同研究である。

(1) 不偏推定量の構成

$(E[X^p])^{1/p} = \gamma$ であるから、これが不偏推定の基礎となるが、例えば$\left(X^{1/2} + Y^{1/2}\right)^2 = X + Y + 2X^{1/2}Y^{1/2}$であって、これは明らかに可積分ではない。そこでうまく１次の項を繰り込んでしまえば、可積分でかつ不偏な推定量を構成することができることを示した。またそれらの推定量に対して Cramer-Rao 下限との関係を明らかにした。

(2) 幾何平均

正の実数に対して、p 乗平均が $p \to 0$ のときに幾何平均に収束することはよく知られている。これに対応して、コーシー分布に対しても幾何平均 $\prod_{j=1}^{N} X_j^{1/N}$ を定めた。ただし X_j は負の値もとるので、これは通常の幾何平均 $\left(\prod_{j=1}^{N} X_j\right)^{1/N}$ ではない。しかしながら、この量がやはり可積分であって、しかも推定量として不偏性を持つことを示した。

さらに大数の法則、中心極限定理の成立も証明し、その応用として複素平面におけるパラメータ γ に対する信頼円板を構成した。これはコーシー分布の 2 つのパラメータが従来考えられていたような 2 つの実パラメータではなくて、単独の 1 複素パラメータとして捉えることが自然であると主張している。

従来は近似的な手法を使ったり数値計算の手法によったりしながら、一方が既知の仮定の下に他方を推定する研究が多くあったが、2 つのパラメータを同時に推定することに成功したという点においても意義深い成果であった。

(3) 最尤推定量の研究

コーシー分布は幾何型分布ではないので、既存の一般論がほとんど適用できず、最尤推定量に関しても純粋数学的な成果はあまり得られていない。一方で我々は前項までに述べたような、2 つの実パラメータを単一の複素パラメータとしてみなすという思想のもとで、最尤方程式に関しても従来得られていたよりもかなり簡明な表式を得ることができた。

この表式はパラメータ(未知数)に対して複素共役な項を含むため代数方程式にはならないが、一般に N 次の多項式の合成によって表される。

まず標本数が 5 以上のときにはこの方程式に代数的な閉形式による解は一般には存在しないことを示した。そこでこの方程式に対して力学系の観点から解に収束する近似列を構成した。

さらに最尤推定量のある種の十分統計性や擬算術平均に対するワンステップ推定量との関係などを明らかとした。

(4) 擬算術平均

(1)や(2)で述べた各種の平均量とその不偏性は、その構造を深く研究する中で、より一般に $f^{-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f\left(X_j\right)\right)$ という形で記述できることがわかった。これは擬算術平均と呼ばれる量であるが、従来研究されていたものと比べ、複素数値のものを許す必要があるという点で異なる。これは単なる一般化ではなく、従来からコーシー分布はメビウス変換のもとでよい性質を示すことが従来から知られていたが、それらの結果とこの研究成果とを統一的に理解することも可能となり、コーシー分布に対する理解を深める成果であった。さらにいくつかの大数の法則をはじめとして大偏差原理の成立など、確率論の観点からも興味深い極限定理を得た。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計0件

〔図書〕　計2件

１．著者名 舟木　直久、乙部　厳己、謝　賓	４．発行年 2019年
２．出版社 岩波書店	５．総ページ数 xiv + 335
３．書名 確率偏微分方程式	

〔産業財産権〕

〔その他〕

R. Fukushima, T. Funaki, Y. Nagahata, M. Nakashima, H. Osada and Y. Otobe eds, Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems, RIMS Kokyuroku Bessatsu B59, ISSN 1881-6193, 2016.

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関