

令和 2 年 6 月 26 日現在

機関番号：13601
 研究種目：基盤研究(C) (一般)
 研究期間：2016～2019
 課題番号：16K05197
 研究課題名(和文) Various properties relative to intermittency of space-time fractional SPDEs

 研究課題名(英文) Various properties relative to intermittency of space-time fractional SPDEs

 研究代表者
 謝 賓 (XIE, Bin)

 信州大学・学術研究院理学系・准教授

 研究者番号：50510038
 交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：

本研究では、ある種の特異性を持つ確率偏微分方程式の解のintermittencyに関連する様々の重要な性質についての研究を行った。とくに、非斉次型の時空ホワイトノイズが加わった確率偏微分方程式の解についてのintermittencyを示した。また、dimension-free Harnack 不等式の手法より、対数型のポテンシャルを持つ確率カーン=ヒリアード(Cahn-Hilliard)方程式を含む特異な確率偏微分方程式のエルゴード性を考察した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非適切(ill-posed)な確率偏微分方程式の解の性質を考察すべき問題が多く残されている。本研究ではある種の特異性を持つ確率偏微分方程式の解の長時間にわたる振る舞い、特にintermittencyや半群の超圧縮性の研究を行ったので、非適切な確率偏微分方程式についてのエルゴード理論の確立に寄与する意義がある。また、得られた研究成果は多くの応用分野での応用が期待できる。さらに、共著の書籍「確率偏微分方程式」を出版することにより、確率偏微分方程式論の研究の普及や発展に貢献する。

研究成果の概要(英文)：

In this research project, we mainly devoted to various important behaviors relative to the intermittency of singular stochastic partial differential equations. In particular, we proved the intermittent property of the solution of stochastic partial differential equations driven by inhomogeneous space-time white noises. We also studied the ergodicity of some singular stochastic partial differential equations, which include the stochastic Cahn-Hilliard equations with logarithmic potentials as an important example.

研究分野：確率解析

キーワード：確率偏微分方程式 無限次元Harnack不等式 Intermittency 確率カーン=ヒリアード方程式 Hypercontractivity 特異性

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

確率偏微分方程式は確率論において重要な研究分野の一つであり、数理科学のみにとどまらず、種々の応用分野、とりわけ物理学・工学・生物学に幅広く応用されている。2014年に確率偏微分方程式論の研究者 M. Hairer 氏が Fields 賞を受賞された。それを機に確率解析的手法より確率偏微分方程式に関する研究がさらに活発になって、世界の注目を集めた。M. Hairer 氏の正則構造理論より、Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) 方程式のような特異項を持つ半線形確率偏微分方程式の解に意味づけが可能となった。一方、解に関する長時間の振る舞いなどの確率的性質の研究は困難だと考えられ、これに関する研究成果が少ない状況であった。KPZ 方程式と放物型の Anderson モデルとの深い関係を考慮し、ある種の特異性を含む確率反応拡散方程式の解の性質を詳しく調べるのが必要不可欠だと思われる。

2. 研究の目的

本研究課題では、確率解析的手法を用いて、確率偏微分方程式の intermittency に関連する種々の性質の研究により、非適切 (ill-posed) な確率偏微分方程式の解の長時間にわたる振る舞いに関する新しい基礎理論の発展をもたらすことを掲げている。これを遂行するために、具体的に以下のことを主に行う。

本研究期間では、種々のノイズで摂動された非線形の確率偏微分方程式の解の間欠性 (intermittency) を中心にして、解についての重要な長時間の振る舞いおよびそれに関連する性質の研究に取り組む。とくに、確率解析的手法により特異性を持つ確率偏微分方程式についての intermittency、安定性、エルゴード性の研究を行う。

3. 研究の方法

確率偏微分方程式の解の intermittency に関連する最新の論文や専門書を精読し、最新の研究動向を把握しながら、研究を行った。研究目的を遂げるためには、国内外で開催される関連分野の研究集会に出席し、最新の研究情報収集をするとともに、確率偏微分方程式についての専門家と意見交換や議論を行った。また、研究の進捗状況を踏まえ、研究集会で得られた研究成果を積極的に発表した。専門家のご助言に基づき、研究成果に磨きをさらにかけて、改良した。さらに、関連分野の研究者との交流を図ることで、2018年に信州大学にてワークショップ「Stochastic partial differential equations and related topics」を開催し、研究についての新たな知見を得た。また、国際研究集会「13th AIMS」にてスペシャルセッション「Qualitative and Quantitative Techniques for Differential Equations arising in Applied and Natural Sciences」を企画した。

4. 研究成果

- (1). 非斉次型の時空ホワイトノイズが加わった確率熱伝導方程式について解の正則性や間欠性の研究を行った。非斉次型の時空ホワイトノイズは触媒作用の超ブラウン運動 (catalytic super-Brownian motion) 密度についての研究に現れた時空ノイズであり、その catalytic 測度はルベグ測度に対して特異である。このような非均質のノイズが加わった確率偏微分方程式については触媒の影響で、解が全区間で連続性が失うことがある。この研究では、触媒に適切な条件を付けくわえて、解の正則性、特に空間変数のヘルダー連続性を調べ、解の間欠性が生じることを示した。
- (2). Dimension-free Harnack 不等式の手法より、特異な確率偏微分方程式のエルゴード性を考察した。Dimension-free Harnack 不等式は F. Y. Wang によって導入されたもので、マル

コフ過程のエルゴード性やマルコフ半群の密度関数の評価などを調べるのに非常に有効な道具であり、近年確率偏微分方程式論の領域にも注目されている。反射壁を持つ乗法的ノイズが加わった確率偏微分方程式の解に付随するマルコフ半群に対して、比較定理に基づき、その Gradient の一様な評価を得て、対数型の Harnack 不等式が成り立つことを示した。また、加法的ノイズの場合、解に付随するマルコフ半群は冪型の Harnack 不等式を満たすことを証明し、その応用としてマルコフ半群の超圧縮性やエントロピーの指数収束性など重要な性質を得た。さらに、フランスの Goudenege 氏との共同研究により、二重井戸型 (double-well) を含む対数型のポテンシャルを持つ確率カーン = ヒリアード方程式のエルゴード性を考察した。このような方程式は質量保存の法則にしたがう。ノイズの特徴(退化または非退化)によって、解に付随するマルコフ半群に対して漸近的な対数型の Harnack 不等式および冪型の Harnack 不等式がそれぞれ成り立つことを示した。とくに、退化したノイズの場合、エルゴード性を示すための重要な漸近的強 Feller 性を得た。これらの結果は国際雑誌に投稿した。

- (3). ジャンプ型の時空ホワイトノイズを持つ確率反応拡散方程式についての比較定理およびその解の無相関性を示した。これは M. Niu 氏との共同研究の結果である。強度測度(Intensity measure)に適切な条件を付けて、初期値とドリフト係数についての比較定理が成り立つことを示し、さらに応用として、解の非負性ならびに無相関性を調べた。
- (4). 有界な凸領域に値をとるランダムなストリング (random string) についてのエルゴード性を考察した。解の近似およびエネルギーの評価により、退化するガウス型のノイズが加わったランダムなストリングの解に付随するマルコフ過程の不変測度の存在と一意性を示した。また、適切な条件の下で、不変測度の指数的積分可能性などの性質も調べた。
- (5). 舟木氏、乙部氏との共著で専門書「確率偏微分方程式 (岩波数学叢書)、単行本、岩波書店、2019年3月」を執筆した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 2件 / うちオープンアクセス 1件）

| | |
|--|---------------------------|
| 1. 著者名 B. Xie | 4. 巻 B79 |
| 2. 論文標題 A note on random strings with values in a bounded convex domain | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu | 6. 最初と最後の頁 199 ~ 213 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |
| 1. 著者名 Niu Min and Xie Bin | 4. 巻 24 |
| 2. 論文標題 Comparison theorem and correlation for stochastic heat equations driven by Levy space-time white noises | 5. 発行年 2019年 |
| 3. 雑誌名 Discrete & Continuous Dynamical Systems - B | 6. 最初と最後の頁 2989 ~ 3009 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/dcdsb.2018296 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 該当する |
| 1. 著者名 Xie Bin | 4. 巻 266 |
| 2. 論文標題 Hypercontractivity for space-time white noise driven SPDEs with reflection | 5. 発行年 2019年 |
| 3. 雑誌名 Journal of Differential Equations | 6. 最初と最後の頁 5254 ~ 5277 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2018.10.022 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |
| 1. 著者名 M.Niu, B. Xie | 4. 巻 469 |
| 2. 論文標題 Wang's Harnack inequalities for space-time white noises driven SPDEs with two reflecting walls and their applications | 5. 発行年 2019年 |
| 3. 雑誌名 J. Math. Anal. Appl. | 6. 最初と最後の頁 568-593 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jmaa.2018.09.029 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 該当する |

| | |
|---|---------------------------|
| 1. 著者名 Bin XIE | 4. 巻 264 |
| 2. 論文標題 Intermittency for stochastic partial differential equations driven by strongly inhomogeneous space-time white noises | 5. 発行年 2018年 |
| 3. 雑誌名 Journal of Differential Equations | 6. 最初と最後の頁 1050 ~ 1079 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2017.09.028 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|-----------------------|
| 1. 著者名 謝 實 | 4. 巻 402 |
| 2. 論文標題 Harnack inequalities for the stochastic partial differential equations with reflecting walls and their application | 5. 発行年 2018年 |
| 3. 雑誌名 共同研究レポート402 | 6. 最初と最後の頁 104-111 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし | 査読の有無 無 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|-------------------------|
| 1. 著者名 Bin XIE | 4. 巻 126 |
| 2. 論文標題 Some effects of the noise intensity upon non-linear stochastic heat equations on $[0,1]$ | 5. 発行年 2016年 |
| 3. 雑誌名 Stochastic Process. Appl. | 6. 最初と最後の頁 1184と1205 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である) | 国際共著 - |

| | |
|---|---------------------|
| 1. 著者名 Bin XIE | 4. 巻 385 |
| 2. 論文標題 Intermittency and noise excitation for stochastic heat equations driven by various noise | 5. 発行年 2017年 |
| 3. 雑誌名 統計数理研究所共同研究レポート | 6. 最初と最後の頁 48と53 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし | 査読の有無 無 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

〔学会発表〕 計21件（うち招待講演 18件 / うち国際学会 11件）

| |
|--|
| 1. 発表者名 B. Xie |
| 2. 発表標題 Asymptotic behavior of reflected SPDEs with singular potentials driven by additive noises |
| 3. 学会等名 2019年度 確率解析シンポジウム, 確率解析とその周辺 |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 B. Xie |
| 2. 発表標題 Ergodic properties of stochastic partial differential equations with reflecting walls |
| 3. 学会等名 2019 Spring Probability Workshop, Taiwan (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 B. Xie |
| 2. 発表標題 Some properties of stochastic parabolic partial differential equations |
| 3. 学会等名 Probability Seminiar, Jiangsu Normal University (招待講演) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 謝實 |
| 2. 発表標題 Dimension-free Harnack inequalities for stochastic Cahn-Hilliard equation with logarithmic nonlinearity |
| 3. 学会等名 Japanese-German Open Conference on Stochastic Analysis 2019 (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 謝實 |
| 2. 発表標題 Ergodic properties of stochastic partial differential equations with reflections |
| 3. 学会等名 SEMINAIRE-GROUPE DE TRAVAIL PROBABILITES - STATISTIQUES - CONTROLE, France (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 謝實 |
| 2. 発表標題 Ergodic property of stochastic Cahn-Hilliard equation with the logarithmic free energy |
| 3. 学会等名 ReaDinet 2019: Mathematical Analysis for Biology and Ecology, France (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 B. Xie |
| 2. 発表標題 Intermittency and noise excitation for stochastic partial differential equations |
| 3. 学会等名 Probability Seminiar, CAS (招待講演) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 B. Xie |
| 2. 発表標題 Dimension-free Harnack inequalities for the Markov semigroup generated by reflected SPDEs |
| 3. 学会等名 17th workshop on Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems (招待講演) |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 B. Xie |
| 2. 発表標題 On the reflected stochastic partial differential equation driven by space-time white noise |
| 3. 学会等名 Seminar at Geometric Measure and related fields, BUAA (招待講演) |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 B. Xie |
| 2. 発表標題 On the space-time white noise driven SPDE with reflection |
| 3. 学会等名 Workshop on Stochastic systems: their analysis, geometry and perturbation (招待講演) |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 B. Xie |
| 2. 発表標題 Harnack inequalities for reflected SPDEs and their applications |
| 3. 学会等名 The 12th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations, and Applications (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 B. Xie |
| 2. 発表標題 Hypercontractive property for reflected SPDE driven by space-time white noise |
| 3. 学会等名 2018 IMS Asia Pacific Rim Meeting in Singapore (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 謝 實 |
| 2. 発表標題 Harnack inequalities for the stochastic partial differential equations with reflecting walls and their applications |
| 3. 学会等名 共同研究集会「無限分解可能過程に関連する諸問題」 |
| 4. 発表年 2017年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 謝 實 |
| 2. 発表標題 The fluctuations for the evolutionary models of two-dimensional Young diagrams |
| 3. 学会等名 確率・統計・行列ワークショップ 松本 2017 (招待講演) |
| 4. 発表年 2017年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Bin XIE |
| 2. 発表標題 Dimension-free Harnack inequalities for the stochastic partial differential equation with reflection |
| 3. 学会等名 16th International symposium "Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2017年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Bin XIE |
| 2. 発表標題 Log-Harnack inequality for reflected stochastic partial differential equations with multiplicative noise |
| 3. 学会等名 2017 IMS-China International Conference on Statistics and Probability (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2017年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Bin XIE |
| 2. 発表標題 Intermittency of Stochastic Partial Differential Equations |
| 3. 学会等名 The 10th ICOSA international conference (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2016年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 謝 實 |
| 2. 発表標題 Intermittency and noise excitation for stochastic heat equations driven by various noises |
| 3. 学会等名 共同研究集会「無限分解可能過程に関連する諸問題」 |
| 4. 発表年 2016年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Bin XIE |
| 2. 発表標題 Intermittency for stochastic partial differential equations driven by inhomogeneous space-time noises |
| 3. 学会等名 15th workshop on Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2016年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 謝 實 |
| 2. 発表標題 Intermittent property of parabolic stochastic partial differential equations |
| 3. 学会等名 東京確率セミナー (招待講演) |
| 4. 発表年 2016年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Bin XIE |
| 2. 発表標題 On intermittency of stochastic heat equation with Dirichlet boundary condition |
| 3. 学会等名 Workshop on stochastic differential equations and stochastic processes (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2016年 |

〔図書〕 計1件

| | |
|-----------------------------|-----------------|
| 1. 著者名 舟木 直久, 乙部 敏己, 謝 實 | 4. 発行年 2019年 |
| 2. 出版社 岩波書店 | 5. 総ページ数 335 |
| 3. 書名 確率偏微分方程式 | |

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

| | | | |
|---------|---------------------------|-----------------------|----|
| 6. 研究組織 | 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|---------|---------------------------|-----------------------|----|