

令和 2 年 6 月 10 日現在

機関番号：13801

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05199

研究課題名(和文) 距離空間における微分方程式の適切性理論の構築 - ベクトル空間の枠を超える挑戦 -

研究課題名(英文) Well-posedness for differential equations in metric spaces

研究代表者

田中 直樹 (Tanaka, Naoki)

静岡大学・理学部・教授

研究者番号：00207119

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的は、解の初期値に関する連続的依存性に着目し、バナッハ空間における微分方程式の適切性の研究を、距離により方程式の消散構造を捉える研究へ発展させ、新たな潮流であるベクトル空間に捉われない適切性理論の枠組みを与えることである。具体的には、リプシッツ作用素半群に対する積公式の導出と微分方程式の混合問題の近似可解性への応用、非整数階時間微分を含む発展方程式の一般論の構築、距離族による消散条件による変異解析の再構築、準線形作用素の定義域の稠密性を仮定しない設定による準線形理論の改良、距離空間における勾配流に対する積公式の導出と汎関数の摂動に付随する勾配流への応用を考察した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の成果は、コンパクト性条件を利用することなく、Aubin による変異解析(距離空間における微分方程式の適切性)を再構築した点、射影を用いた交換子条件のもとで加藤理論を改良した点に特色があり、汎用性の高い理論の構築、距離空間における微分方程式の適切性の問題への新しい視点に繋がると考える。また、このような理論的な立場からだけでなく、近年盛んに研究されるようになった時間微分の分数冪を含む非線形偏微分方程式の研究に対する基本的枠組みを提供できたことは、実用的な立場からも、当該分野だけでなく非線形偏微分方程式の分野においても、一定の評価を得られると期待している。

研究成果の概要(英文)：This research is based on the concept of the continuous dependence of solutions on initial data. The first purpose is to extend the study of the well-posedness for differential equations in Banach spaces to the study to express the dissipative structure of equations by metric-like functionals. The second purpose is to provide a new framework for well-posed theory that is beyond vector spaces, without compactness. The following topics were discussed: (1) Product formulas for semigroups of Lipschitz operators and its application to the approximate solvability of mixed problems of differential equations, (2) The general theory of evolution equations with fractional derivatives, (3) Mutational analysis by dissipativity in terms of a family of metrics, (4) Quasilinear theory without assuming that the domains of quasilinear operators are dense, (5) Product formulas for gradient flows in metric spaces and its application to gradient flows governed by perturbations of functionals.

研究分野：作用素半群と発展方程式

キーワード：リプシッツ作用素半群 距離空間における勾配流 距離による消散条件 準線形理論 作用素半群の積公式 非整数階時間微分を含む発展方程式 変異解析 解の初期値に関する連続的依存性

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

## 様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

(1) 時間に依存する単調作用素, 劣微分作用素により支配される発展方程式の枠組みの拡張: 単調作用素  $A(t)$  に支配される発展方程式  $u'(t) + A(t)u(t) \ni 0$  に関する加藤による先駆的な研究の後, 汎関数  $\phi^t$  の劣微分作用素  $\partial\phi^t$  により支配される発展方程式  $u'(t) + \partial\phi^t(u(t)) \ni 0$  に関する研究がなされている。これは, 加藤により提案された作用素  $A(t)$  の  $t$  に関する条件とは異なる汎関数  $\phi^t$  の  $t$  に関する条件のもとで行われ, その条件の汎用性の高さから, 非線形放物型方程式の混合問題へ応用されている。しかし, 重要な研究対象である Neumann 境界条件つき多孔質媒体方程式に対する適切性や流れの制約条件に対する変分不等式の問題は, その解が初期値に関してリプシッツ連続的に依存するため, 単調作用素, 劣微分作用素の理論を直接的に適用することが困難であり, 方程式の特性を生かした工夫が施されて個別的に考察されている。

(2) 加藤の準線形理論の拡張—距離空間における微分方程式の適切性理論の構築に向けて—: 与えられた準線形方程式に対する適切性の考察は, 重要な研究テーマの 1 つである。関数空間における準線形方程式への組織的な取り扱いとして, 加藤により展開されたバナッハ空間における準線形理論がある。一方, 一般の完備な距離空間における微分方程式に対する適切性の研究について, Nonsmooth Analysis で高名な Aubin により, その重要性が説かれている。線形構造の欠如から, 距離空間における微分概念を捉え直す必要がある。transition なる概念を導入し, あるコンパクト性条件のもとで, 距離空間における微分方程式に対する適切性を考察する動きがある。準線形人口構造モデルに対するラドン測度値の解の構成を代表的な応用例として含む。しかし, 加藤理論に匹敵するような組織的に理論展開された研究は少ない。

(3) AGS 理論の深化を目指して—距離空間における勾配流に対する適切性の考察—: 距離空間における勾配流の研究は, 2つの観点から始められた。1つは, Brezis により展開された, 非線形放物型方程式へ豊富な応用をもつ, ヒルベルト空間における劣微分作用素の理論を距離空間へと一般化する理論的立場である。Ambrosio, Gigli, Savaré による AGS 理論がある。もう 1つは, Boltzmann entropy に付随する勾配流の可解性が, Wasserstein distance と呼ばれる距離を備えた空間において考察され, 距離空間上での勾配流の解析が応用上重要であることが認識されたことである。距離空間における勾配流の理論的立場からの研究は, 勾配流を記述するための汎関数  $\phi$  に対して,  $\phi(u(t))$  が  $t$  に関して単調非増加である解  $u$  の存在に限られている。

### 2. 研究の目的

(1) 時間に依存する単調作用素, 劣微分作用素により支配される発展方程式の枠組みの拡張: Neumann 境界条件つき多孔質媒体方程式に対する適切性や流れの制約条件に対する変分不等式の問題などの重要な研究対象である方程式に加え, 双曲型方程式系を組織的に扱えるように, 加藤理論や時間に依存する劣微分作用素により支配される発展方程式の枠組みを拡張することが本研究の目的である。

(2) 加藤の準線形理論の拡張—距離空間における微分方程式の適切性理論の構築に向けて—: 加藤の準線形理論を包括する距離空間における微分方程式の適切性理論を構築することが本研究の目的である。

(3) AGS 理論の深化を目指して—距離空間における勾配流に対する適切性の考察—: 距離空間における勾配流に対する適切性について,  $\phi(u(t))$  の  $t$  に関する単調非増加性の緩和, 平滑化効果の問題が, 重要で魅力ある研究として活発化すると考えられる。これらを実行に移し, 距離空間における勾配流に対する適切性理論を深化させることが本研究の目的である。

### 3. 研究の方法

(1) 時間に依存する単調作用素, 劣微分作用素により支配される発展方程式の枠組みの拡張:  
① 解の初期値に関する連続的依存性に着目した生成条件の提案: 非自励な微分方程式について, 解の初期値に関する連続的依存性は, 与えられた 2つの関数をそれぞれ初期値とする方程式のシステムを考え, リアプノフ汎関数を用いる安定性解析により得られると解釈できる。この新たな解釈のもとに, 方程式を支配する作用素族に関する生成条件として, 劣接線条件を組み入れた安定性条件を提案する。応用上, 安定性を表現する距離の構成は重要であり, スペクトル解析による構成法を開発する。  
② 微分作用素のイメージと結びつきにくい連続性条件の導出と検証: 汎関数  $\phi^t$  の  $t$  に関する連続性のもとに, 劣微分作用素  $\partial\phi^t$  のある種の条件つき連続性を導き出す。微分作用素のイメージと結びつきにくい連続性の条件に着目して, 非自励な方程式系の適切性定理を展開する。 $p$ ラプラス作用素を主要部にもつ放物型方程式, 多孔質媒体方程式を包括する二重非線形方程式を支配する作用素のもつ性質を系統的に調べ, 導出される条件つき連続性の有効性を吟味する。

(2) 加藤の準線形理論の拡張—距離空間における微分方程式の適切性理論の構築に向けて—:

① 微分の代用概念の再考: ユークリッド空間における常微分方程式に対する適切性定理を距離空間の場合へと拡張する過程で、折れ線法が利用された。Transition の概念は、折れ線法が機能するように、右微分、前進差分の代用として導入され、特に空間変数に関して準縮小的となるように導入されている。一方、加藤の準線形方程式を考察する場合には、安定性の観点から、それに付随する transition は準縮小的でなく、新たな枠組みの導入が必要となる。そこで、2 つの曲線を分類する同値関係を利用して、transition の概念を再考する。

② 代数構造に依らない解の性質の導出: 再考による transition の導入方法が、Aubin の研究を、加藤の準線形理論を包括できる理論へと発展させる。距離空間における微分方程式を再考の transition を用いて定式化する。距離を用いて、解が満たす不等式、等式を導出し、解の性質を代数構造に依らずに捉える枠組みを提案する。これにより、近似解として適切なクラスを準備し、新しい枠組みから生ずる近似解の評価の困難さを克服する。

③ 距離空間における微分方程式の適切性条件の特徴づけ: 本研究では、距離空間  $(X, d)$  における解の初期値に関する連続的依存性の概念を、2 つの初期値を結ぶ曲線  $c(\theta)$  を初期値とする解  $c(t; \theta)$  について、その第 1 変分  $\dot{c}(t, \theta)$  を transition により表現し、それを評価することで定式化する。評価するものさしとして、transition を安定にする  $d$  と同値な距離族を導入する。この方針には、消散項付きの準線形波動方程式の 2 つ解の差を測る距離の構成に用いた方法が基本にある。バナッハ空間におけるリプシッツ作用素半群の生成定理の考察で培った手法を駆使して、本研究を進める。

(3) AGS 理論の深化を目指して—距離空間における勾配流に対する適切性の考察—:

① 増大条件の導入: 抽象空間での微分方程式の可解性の研究では、汎用性の高さを追究し、絶対連続なベクトル値関数の微分可能性の問題を回避する方針をとる立場がある。AGS 理論もその 1 つであり、距離空間における勾配流に対する解の概念が積分不等式により導入され、勾配流を記述する汎関数  $\phi$  に対して、 $\phi(u(t))$  の  $t$  に関する単調非増加性を満たす解の存在が議論されている。本研究では、比較関数の最大解を用いて増大条件を導入し、単調非増加性条件を緩和する。

② 軟解の概念の導入: 解の平滑化効果を追究するためには、平滑性をもつ解とそうでない解を比較する手段が有効であるという考えのもとに、軟解の概念を導入する。解  $u$  について、 $t \downarrow 0$  のときの  $\phi(u(t))$  や  $t^{-1} \int_0^t \phi(u(r)) dr$  などの挙動を調べることにより、勾配流に対する差分近似方程式を導出する。その差分近似方程式の解の一樣収束極限として、勾配流に対する軟解の概念を定式化する。

③ 超限帰納法による近似解の構成: 差分近似解を構成する際の重要な問題は、近似解の延長可能性である。時間ステップの添え字が可付番順序数となることを許容する戦略により、ある可付番順序数をもつ時間ステップで目的の時刻に到達し、近似解は差分方程式を満たす単純関数として得られる。可測性の概念を考慮すれば、可付番順序数による超限帰納法による構成が有効である。

#### 4. 研究成果

(1) 時間に依存する単調作用素、劣微分作用素により支配される発展方程式の枠組みの拡張について:

① 延滞を記述する微分方程式に対する適切性定理の確立: 発展方程式の枠組みの拡張として、遅れを考慮した方程式を考察する方向がある。この方向性において、サイズ構造モデルへ適用可能な半線形関数微分方程式に関する研究を行った。積分方程式を利用した近似解の構成を提示し、initial history space での消散条件の発見を通して近似解の差の評価を確立した。さらに、潜伏期間を考慮したサイズ構造モデルへ応用した。

② 連続でない作用素により生成されるリプシッツ作用素半群の近似定理の確立: 解の初期値に関する連続的依存性の観点では、単調作用素理論が関数の差をノルムで評価するのに対して、距離を利用するものがリプシッツ作用素半群理論である。Kirchhoff 方程式の混合問題への近似可解性を視野に、微分作用素の性質からイメージしにくい連続性条件を満たす生成素のクラスを導入し、それにより生成されるリプシッツ作用素半群に対する積公式の導出に成功した。

③ 関数微分方程式に対する適切性に関する統一的理論の構築: 発展方程式の枠組みの拡張として、遅れを考慮した非自励な方程式があり、これに関する従来の様々な研究を統一的に扱う理論の構築を目指し、スティルチェス積分により記述される積分方程式の最大解を利用した解の増大度条件を提案すると同時に、連続な有界変動関数を利用した連続率による方程式を支配する作用素の時間に関する連続性条件の下で可解性を確立し、原稿を投稿中である。

④ リプシッツ発展作用素の生成定理の模索: 本研究課題をリプシッツ発展作用素の生成の問題へ翻訳し考察中である。具体的には、微分作用素のイメージと結びつきにくい、時間に依存する劣微分作用素がもつ連続性条件を導出し、双曲系をも組織的に取り扱うことができる発展方程式の枠組みを提案しているが、この枠組みにおいて適切性定理を模索中である。当初予期していないことへの対処として、時間とともに変化する定義域をもつ準線形方程式の可解性の研究を実施し、定義域を一定にする変換の導入を視野に入れ、定義域は一定であるが、方程式を支配する作用素族の時間に関する滑らかさの条件を極力弱める方向に目をむけ、準線形作用素族に支配される微分方程式系の可解性に関する結果を準備した。この件について、多方面からの考察と

して、カラテオドリ条件を満たす準線形作用素に支配される発展方程式の初期値問題に関する適切性定理を確立し、原稿を執筆中である。

⑤ 非整数階時間微分を含む発展方程式の一般論の構築：研究分担者である赤木は、Hilbert空間における非整数階時間微分を含む発展方程式の一般論の構築を行い、高村-Brezis理論を拡張した。この研究は近年盛んに研究されるようになった時間微分の分数冪を含む非線形偏微分方程式の研究に対する基本的枠組みを与えるものである。

(2) 加藤の準線形理論の拡張—距離空間における微分方程式の適切性理論の構築に向けて—：

① Aubinによる変異解析の改良による加藤理論の拡張：距離空間  $(X, d)$  における微分方程式に対する適切性を、transition を安定にするような  $d$  と同値な距離族による消散条件、及び、劣接線条件により特徴づけた。本研究は、先行研究と異なり、コンパクト性条件を利用しないことに特色がある。与えられた準線形方程式に対する適切性の考察は、重要な研究テーマの1つである。関数空間における準線形方程式への組織的な取り扱いとして、加藤により展開されたバナッハ空間における準線形理論がある。応用として、この加藤の時間局所的適切性定理を導出した。また、Aubinにより始められた変異方程式に対する適切性定理の特徴づけの微分方程式への応用を探り、この内容を含め、近年の作用素半群の研究動向を日本数学会企画特別講演で紹介した。

② 定義域の稠密性を仮定しない理論構築による加藤理論の拡張：定義域が稠密でなく一定でもない準線形作用素に支配される発展方程式の初期値問題に対する適切性に焦点を当て、加藤の準線形理論を、可積分関数の空間におけるサイズ構造モデルへ応用可能となるように改良した。射影を用いた交換子の条件のもとで、理論展開した点が特色である。

(3) AGS理論の深化を目指して—距離空間における勾配流に対する適切性の考察—について：

① 比較関数の最大解を用いた増大条件の援用によるAGS理論の拡張：汎関数の摂動—Boltzmann entropy, Renyi entropyなどとpotential energyの汎関数の2つの和で表現される汎関数—に付随する勾配流への接近法として、Trotter-Kato型の積公式が知られている。これをChernoff型の積公式へ拡張し、京都大学数理解析研究所の集会で成果発表を行った。比較関数の最大解を用いた増大条件を導入して、距離空間における勾配流の適切性の問題を、増大条件を組み入れた変分不等式の可解性の問題へと翻訳し、距離空間における勾配流に対する適切性定理を確立した。また、距離空間における勾配流に対する積公式を導出し、それを汎関数の摂動に付随する勾配流への接近法へ応用した。

② 二重非線形発展方程式に対する変分的定式化を通じた勾配流理論の深化：研究分担者である赤木は、二重非線形発展方程式に対する変分的定式化の試みとして、WED汎関数を用いた変分原理を導入した。特に、Serra-Tilli (2012, Ann. of Math.)により開発されたWED汎関数に対する変分的手法を組み込むことで、発展方程式の時間大域解を直接的に得るスキームを開発した。さらに、単調成長を拘束条件に持つ勾配流の例として非斉次項付き拡散方程式に対応する問題の可解性や解の正則性・比較原理・長時間挙動を研究した他、分数冪ラプラシアン境界値問題に対する解の正則性理論や一般化された勾配流に対する変分原理について研究を行った。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Tanaka Naoki	4. 巻 480
2. 論文標題 Approximation of abstract Cauchy problems for dissipative operators with respect to metric-like functionals	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 123406 ~ 123406
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jmaa.2019.123406	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Tanaka Naoki	4. 巻 248
2. 論文標題 Evolution variational inequalities with growth conditions in metric spaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Studia Mathematica	6. 最初と最後の頁 147 ~ 169
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4064/sm171224-23-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Akagi Goro, Schimperna Giulio, Segatti Antonio	4. 巻 276
2. 論文標題 Convergence of solutions for the fractional Cahn-Hilliard system	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Functional Analysis	6. 最初と最後の頁 2663 ~ 2715
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jfa.2019.01.006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 AKAGI GORO, EFENDIEV MESSOUD	4. 巻 30
2. 論文標題 Allen-Cahn equation with strong irreversibility	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 European Journal of Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 707 ~ 755
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S0956792518000384	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Akagi Goro	4. 巻 234
2. 論文標題 Fractional flows driven by subdifferentials in Hilbert spaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Israel Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 809 ~ 862
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11856-019-1936-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kobayashi Yoshikazu, Tanaka Naoki	4. 巻 225
2. 論文標題 Well-posedness for mutational equations under a general type of dissipativity conditions	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Israel Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1 ~ 33
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11856-018-1660-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Matsumoto Toshitaka, Tanaka Naoki	4. 巻 162
2. 論文標題 Abstract Cauchy problems for quasilinear operators whose domains are not necessarily dense or constant	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 91 ~ 112
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.na.2017.06.013	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sano Hiroki, Tanaka Naoki	4. 巻 30
2. 論文標題 Well-posedness and flow invariance for semilinear functional differential equations governed by non-densely defined operators	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Differential Integral Equations	6. 最初と最後の頁 695-734
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件（うち招待講演 2件 / うち国際学会 6件）

1. 発表者名 Kobayashi Yoshikazu, Tanaka Naoki
2. 発表標題 An approximation theorem of Lax type for evolution operators of Lipschitz operators in a metric space
3. 学会等名 International Conference on Optimization: Techniques and Applications (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Akagi Goro
2. 発表標題 Traveling wave dynamics for Allen-Cahn equations with non-decreasing constraints
3. 学会等名 Chemotaxis and Nonlinear Parabolic Equations -In honor of Professor Takasi Senba on his 60th birthday- (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kobayashi Yoshikazu, Tanaka Naoki
2. 発表標題 Lipschitz semigroups and mutational equations in metric spaces
3. 学会等名 The Role of Metrics in the Theory of Partial Differential Equations (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kobayashi Yoshikazu, Tanaka Naoki
2. 発表標題 Remarks on semigroups of Lipschitz operators in a metric space
3. 学会等名 The 6th Asian Conference on Nonlinear Analysis and optimization (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 田中直樹
2. 発表標題 距離空間における作用素半群と微分方程式
3. 学会等名 日本数学会年会企画特別講演
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kobayashi Yoshikazu, Tanaka Naoki
2. 発表標題 Dissipative evolution problems in metric spaces
3. 学会等名 The 8th International Conference on Differential and Functional Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 佐野弘貴, 田中直樹
2. 発表標題 半線形関数微分方程式に対する適切性とその応用
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kobayashi Yoshikazu, Tanaka Naoki
2. 発表標題 Evolution problems in metric spaces and dissipativity conditions
3. 学会等名 The fifth Asian conference on Nonlinear Analysis and Optimization(NAO-Asia 2016) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Tanaka Naoki
2. 発表標題 Well-posedness for gradient flows in complete metric spaces
3. 学会等名 Researches on isometries from various viewpoints, RIMS Workshop
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

静岡大学教員データベース <a href="https://tdb.shizuoka.ac.jp/RDB/public/">https://tdb.shizuoka.ac.jp/RDB/public/</a>
---

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	赤木 剛朗  (Agaki Goro)  (60360202)	東北大学・理学研究科・教授    (11301)	