

令和元年6月4日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05200

研究課題名(和文) ランダム媒質における均質化と揺らぎの研究

研究課題名(英文) Study of homogenization and fluctuations in random media

研究代表者

福島 竜輝 (Fukushima, Ryoki)

京都大学・数理解析研究所・准教授

研究者番号：60527886

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：まずランダムポテンシャルを伴うシュレディンガー作用素の均質化問題について、ポテンシャルの分布の末尾の条件を限界まで弱めて大数の法則や中心極限定理を証明することに成功した。またランダムな障害物を避けながらランダムウォークする粒子の軌道の形状について、従来の研究を大幅に精密化する結果を得た。この他にもランダム媒質中のランダムウォークの局在、非局在に関して大偏差原理からの視点の研究と、大数の法則の意味での非局在の条件を改良する研究など、多岐にわたる問題で成果があった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ランダム媒質における均質化や揺らぎの問題は、不規則な媒質をどこまで均質な媒質で近似できるかという、応用上も重要な問題である。またこの問題は確率論と微分方程式やスペクトル理論の境界に位置しており、それぞれの分野の手法を活用するだけでなく、手法そのものの開発も伴って研究を行う必要がある。本研究課題においてはとくに測度の集中現象と呼ばれる確率論の比較的新しい理論と、解析学における伝統的な摂動論を組み合わせる効果的な方法を見出したこと、および統計物理の問題において計算機科学の分野でよく使われる組み合わせ論的な方法が有効であることを見出したことに学術的意義がある。

研究成果の概要(英文)：First, I studied a homogenization problem for the random Schrodinger and obtained the law of large numbers and central limit theorem under the optimal moment conditions. Second, I studied the random walk conditioned to avoid randomly located obstacles and obtained very sharp description of the geometry of its trajectory. Beside these main achievements, I also studied several localization/delocalization questions in random walk in random environment. In particular, a kind of localization result in the context of large deviation and an improvement for a condition for delocalization at the level of law of large numbers are obtained.

研究分野：確率論

キーワード：ランダム媒質 拡散過程 ランダム作用素 大偏差原理

## 1. 研究開始当初の背景

現実世界に存在する媒質は均質ではなく、多かれ少なかれ何らかの不規則性を含んでいるので、自然現象のモデルの解析は不規則性の存在を前提として行うことが望ましい。このような不規則媒質のモデルとして、二十世紀半ばからランダムな係数を持つ微分方程式や、対応する確率過程に関して様々な研究が行われるようになった。その結果、不規則性が平均化される状況と、不規則性が系の挙動に大きく影響を与えるという、二つの対照的な場合があることが分かってきた。前者については対称な生成作用素を持つ拡散方程式（拡散過程）、後者についてはランダムポテンシャルを伴うシュレディンガー作用素（Anderson模型）が典型例である。また現象論的には前者は対応する確率過程が非局在、後者は局在する場合に起こることは多くの例で観察されている。しかしこれら二つの状況がどのような機序で生じているかについては未解明の部分も多い。とくに単一のモデルでパラメータなどの変化によって両者の場合を実現するモデルは、時空間のノイズを含む熱方程式や、ランダムな飛躍率を持つ対称ランダムウォークなど、少数の例に限られていた。また不規則性をランダムに実現した場合、このような問題の研究は微分方程式や作用素のスペクトル解析の理論と確率論の境界に位置しているが、実際の研究においては主に研究者の専門に依存していずれかの側面が強調されることが多かった。

## 2. 研究の目的

本研究は上記のような背景のもと、とくにAnderson模型で主要な問題である固有値問題に焦点を当て、局在・非局在の転移を示すような新しいモデルを見出すこと、およびその解析を通じて、ランダム媒質の研究における解析学と確率論のよりバランスのとれた理論・技術を見出すことを目的として行った。より具体的には、Anderson模型に関しては従来からよく調べられているAnderson局在とは対照的ないわゆる「均質化」の問題を研究し、非局在相の発見およびその詳細な解析を目指した。また対称な拡散過程の生成作用素になる楕円型作用素のスペクトルについても、固有値の均質化問題やその揺らぎ、および局在相の発見を目指した。

## 3. 研究の方法

- (1) Anderson模型の固有値問題の研究では、解析学の古典的な手法であるHadamardの変分公式と確率論のマルチンゲール中心極限定理を組み合わせることにより、固有値に対して大数の法則や中心極限定理を示すというアイデアで研究を行なった。このアイデアを遂行するためには、さらに楕円型作用素の固有関数の正則性理論やTalagrandによる測度の集中不等式、Kahs'minskiの補題などを援用する必要があった。
- (2) 楕円型作用素の固有値問題については、上記のAnderson模型と同じ方針で研究したが、この問題では均質化問題において自然に現れる調和座標（写像）の正則性の評価が必要になる。これを特異積分作用素の評価に基づく楕円型作用素の最大正則性の結果などを援用して実行した。
- (3) 研究開始当初から考えていた上の二つの問題の他に、期間中に主に共同研究者に触発されて、ランダム媒質中のランダムウォークの大偏差原理や、ランダム媒質中の高分子模型の零温度極限の問題なども研究した。前者についてはAnderson模型の均質化と揺らぎの研究で展開したKahs'minskiの補題と測度の集中不等式を組み合わせる議論が、他の文脈でも有効であることに気づき、複数の新しい結果を得た。後者については測度の集中不等式と関連するが、いわゆる高次モーメントに対するEfron-Stein型の不等式を有効に使って、自由エネルギーの収束の速さを詳細に評価することで連続性の結果を得た。

#### 4. 研究成果

- (1) Anderson模型の固有値の均質化と揺らぎについては、まずポテンシャルが有界な設定で大数の法則と中心極限定理に加えて、分布の末尾のGauss型評価を得た。さらにその後、測度の集中や楕円型正則性の理論、及びKhas'minskiの補題といった技術を駆使して、ポテンシャルが非有界でもあるモーメントの条件を満たせば大数の法則と中心極限定理が成り立つことも示した。なおモーメントの条件は最善の条件であることも示した。この問題はGuillaume Balによって次元が3以下の場合に、強いモーメント条件のもとで調べられていた。彼の方法は、確率論的には単純な評価に帰着するためにやや不必要に強い解析的な評価を経由しており、次元やモーメントについて最善の条件に到達するのは難しいように思われる。この研究はFlegel, Haida, Slowikによる別の固有値問題の均質化や、同じ設定でモーメント条件を弱めた時のFlegelによる固有関数の局在などいくつかの関連する研究につながった。
- (2) ランダム媒質中のランダムウォークについては大数の法則が成り立ち、正の速度を持つが、それより遅い速度で動くという大偏差原理の確率が劣指数的に減衰するという問題を研究し、待ち時間がランダムであるようなモデルにおいて非常に広範な設定で減衰の速さを精密に決定した。ランダムな待ち時間をランダムウォークはBouchaudのtrap modelとも呼ばれ、いわゆるエイジングと呼ばれる現象のモデルとして盛んに研究されており、本研究の結果はこのモデルの外力に対する応答を理解する一助になると考えられる。
- (3) ランダムな風景の中のランダムウォークというAnderson模型に関連するランダム媒質中のランダムウォークについて研究し、その大偏差の確率を詳細に調べた。この問題については「風景」に対応するランダムポテンシャルの分布末尾が速く減衰する場合は網羅的に調べられている。しかし歴史的にも最も重要なパレート分布の場合には、他の場合に有効であったDonsker-Varadhanの大偏差原理では捉えきれない状況になることが分かっており、未解決の問題になっていた。またこの問題はあるランダム媒質中のランダムウォークの熱核の評価にも応用があり、これまでに観察されなかったような特異な減衰をする状況があることも明らかにすることができた。
- (4) ランダム媒質中の高分子の標準的な連続時空モデルについて、零温度極限での自由エネルギーの連続性を示した。この種のモデルは最近いくつかの可解模型が見つかってKardar-Parisi-Zhangによって予想された揺らぎ指数の存在などが厳密に証明され、非常に研究が盛んになっている。しかし可解でない模型についてはいまだに研究手法は限られており、基本的な問題でも未解決のことが多い。例えば模型が零温度において自然に意味を持つ場合であっても、自由エネルギーという基本的な物理量の存在さえ難しくなることがある。また情報統計力学と呼ばれる分野では離散最適化問題を零温度極限と見なして、その解を見つける乱択アルゴリズムが研究されることも多いが、この極限での連続性は一般には自明ではない。本研究の結果は、標準的な方法である劣加法エルゴード定理が使えない状況で自由エネルギーの存在を示す手法の一つを提示するとともに、その収束の速さを評価することで零温度極限での連続性も証明できることを示しており、今後さらに一般の状況の研究につながると考えられる。

#### 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 (計 5 件)

- ① Marek Biskup, Ryoki Fukushima, Wolfgang Koenig, Eigenvalue fluctuations for lattice Anderson Hamiltonians: Unbounded potentials, *Interdisciplinary Information Sciences* 24(1) 59-76 2018年 査読

有

- ② Amir Dembo, [Ryoki Fukushima](#), Naoki Kubota, Slowdown estimates for one-dimensional random walks in random environment with holding times, *Electronic Communications in Probability*. 23 Paper No. 89, 12 pages 2018年 査読有
- ③ Marek Biskup, [Ryoki Fukushima](#), Wolfgang Koenig, Eigenvalue fluctuations for lattice Anderson Hamiltonians, *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 48(4) 2674-2700 2016年 査読有
- ④ Jean-Dominique Deuschel, [Ryoki Fukushima](#), Quenched tail estimate for the random walk in random scenery and in random layered conductance, *Stochastic Processes and their Applications* 129(1) ??? 2019年 査読有
- ⑤ [Ryoki Fukushima](#), Stefan Junk, Zero temperature limit for the Brownian directed polymer among Poissonian disasters, *Annals of Applied Probability*, 掲載決定, 査読有

〔学会発表〕（計 19 件）

- ① [Ryoki Fukushima](#), Eigenvalue Fluctuations for Lattice Anderson Hamiltonians, *SIAM Conference on Mathematical Aspects of Materials Science*, 2016年
- ② [Ryoki Fukushima](#), Quenched tail estimate for the random walk in random scenery and in random layered conductance, *The 7th Pacific Rim Conference on Mathematics*, 2016年
- ③ 福島竜輝, Quenched tail estimate for the random walk in random scenery, 日本数学会2016年度秋季総合分科会, 2016年
- ④ [Ryoki Fukushima](#), Quenched tail estimate for the random walk in random scenery, *15th Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems*, 2016年
- ⑤ [Ryoki Fukushima](#), Slowdown estimates for the biased random walk in spatially inhomogeneous holding times, *Random media at Atacama*, 2016年
- ⑥ [Ryoki Fukushima](#), Eigenvalue fluctuations for lattice Anderson Hamiltonians, *GSIS winter school and workshop 2017*, 2017年
- ⑦ [Ryoki Fukushima](#), Directed Polymers with Unbounded Jumps, *Spring Probability Workshop*, 2017年
- ⑧ [Ryoki Fukushima](#), Quenched tail estimate for the random walk in random scenery, *Recent Progress in Probability Theory and Its Applications*, 2017年
- ⑨ [Ryoki Fukushima](#), Slowdown estimates for random hopping dynamics, *Large scale properties of partial differential equations with random coefficients*, 2017年
- ⑩ [Ryoki Fukushima](#), Eigenvalue Fluctuations for Lattice Anderson Hamiltonian, *Potential Analysis and its Related Fields*, 2017年
- ⑪ [Ryoki Fukushima](#), A directed polymer in random environment with unbounded jumps, *16th Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems*, 2017年
- ⑫ 福島竜輝, Slowdown estimates for random walks with spatially inhomogeneous holding times, *新潟確率論ワークショップ*, 2018年
- ⑬ [Ryoki Fukushima](#), Geometry of the random walk conditioned to survive among Bernoulli obstacles, *Interplay of Random Media and Stochastic Interface Models*, 2018年
- ⑭ [Ryoki Fukushima](#), Zero temperature limit for Brownian directed polymer in Poissonian disasters, *9th International Conference on Stochastic Analysis and its Applications*, 2018年
- ⑮ [Ryoki Fukushima](#), Tail estimates for random walk in random scenery, *Gaussian free fields and related topics*, 2018年
- ⑯ 福島竜輝, Geometry of the random walk conditioned to survive among Bernoulli obstacles, *確率論シンポジウム*, 2018年
- ⑰ [Ryoki Fukushima](#), Geometry of the random walk conditioned to survive among Bernoulli obstacles, *Spectra of Random Operators and Related Topics*, 2019年
- ⑱ [Ryoki Fukushima](#), Much ado about random walk range, *Second meeting for GlobalMathNetwork*, 2019年
- ⑲ [Ryoki Fukushima](#), Geometry of the random walk conditioned to survive among Bernoulli obstacles, *Stochastic Processes and Related Topics*, 2019年

〔図書〕（計 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 件）

名称：

発明者：

権利者：

種類：

番号：

出願年：

国内外の別：

○取得状況（計 件）

名称：

発明者：

権利者：

種類：

番号：

取得年：

国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

## 6. 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号（8桁）：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。