

令和元年6月21日現在

機関番号：14403

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05203

研究課題名(和文) マルティンゲール空間およびマルティンゲール不等式の実解析的側面の研究

研究課題名(英文) Study of martingale spaces and martingale inequalities in view of real analysis

研究代表者

貞末 岳 (Sadasue, Gaku)

大阪教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：40324884

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：マルティンゲールに対する分数べき積分作用素について、マルティンゲール Morrey 空間での有界性に関する必要十分条件を得るなどの基本性質を確立した。さらにこの研究を進展させ、乗法作用素との交換子の有界性やコンパクト性に関する必要十分条件を得ることに成功した。この過程で基礎的な空間や作用素の定義の改良がもたらされ、またマルティンゲールに対する新しい空間を見出すなど、マルティンゲールに対する実解析的な基礎理論を進展させることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

マルティンゲールに対する実解析的な基礎理論は一時の停滞を終え、再び活発に研究され始めている。この研究動向のなかで、マルティンゲールに対する分数べき積分作用素や Morrey 空間などに正しい定義を与え、その基本性質の研究を着実に積み重ねたことが本研究の学術的意義である。マルティンゲールの実解析的な基礎理論は、1960年代から1970年代にかけて盛んに研究され、それが1990年代に入って数理ファイナンス理論などへの応用が始まった。このことを見ると、基礎理論の充実を行った本研究は将来に社会的意義を持つことになると考えている。

研究成果の概要(英文)：In this study, several fundamental properties of fractional integrals for martingale have been proved. Especially, necessary and sufficient conditions for the boundedness of the fractional integrals on martingale Morrey spaces have been obtained. Furthermore, necessary and sufficient conditions for the boundedness of commutators of the fractional integrals and multiplication operators have been proved. In the process of the study, several definitions of fundamental spaces and operators have been modified, new spaces for martingale have been provided. Thus, this study has a remarkable contributions on analytic theory for martingales.

研究分野：確率解析学

キーワード：マルティンゲール Morrey 空間 分数べき積分作用素

1. 研究開始当初の背景

研究開始当初の研究動向は、代表者が分担者の中井氏らとともに atomic なフィルトレーションを持つ場合にマルティンゲールに対する分数べき積分作用素を定義し、そのマルティンゲール Morrey-Campanato 空間上での有界性を調べたり、また主に中国の研究者が中心となって種々のマルティンゲールの空間の構造を atom 分解により調べるなど、マルティンゲールの実解析的側面についての基礎理論の研究が再び活発になり始めていた。また実解析学では Morrey 空間などの複素補間空間の研究が盛んにおこなわれており「マルティンゲールの実解析的な側面の基礎理論を研究する」こと、とくに分数べき積分作用素を研究することは有望なことと考えていた。

2. 研究の目的

研究開始当初の目的は

- (1) 種々のマルティンゲール空間について複素補間空間の理論を樹立し、その同定を行う。とくに予測可能なマルティンゲール Morrey-Hardy 空間の複素補間空間を同定する。
- (2) 様々なマルティンゲール不等式をバナッハ関数空間の枠組みで考え、重み付き空間や変動指数空間でのマルティンゲール不等式を統一的に取り扱う。
- (3) 一般化分数べき積分作用素を中心にマルティンゲール変換の有界性を種々のマルティンゲール空間で考察し、これまでのマルティンゲール変換の理論を精密化する。

であり、さらに応用に適する形を目指して atomic なフィルトレーションを持つ、という制約を含まない形に理論を一般化して整備することであった。

3. 研究の方法

(1) 本研究では確率論に詳しい代表者が、フィルトレーションや停止時刻等の確率論の技法を用いてマルティンゲールの性質およびマルティンゲール不等式・マルティンゲール変換を調べる部分を担当し、関数空間やその上の作用素に詳しい分担者が種々のマルティンゲール空間の適切な定式化と、その上で考えるべき作用素を選択してそれを解析するという部分を担当した。

(2) 研究の進め方については、主には代表者と分担者との間での電子メールを用いて議論をして論文を書き進め、それを学会や互いの勤務先の訪問を行って確認し、さらには直接の議論を行うことで次の研究の指針を得る、という方法をとった。この際、他の研究者から得たプレプリントなどの情報交換が、研究の指針として相当重要だった。さらに学会発表を通じて他の研究者の意見を心得て研究を進めるという方法もとった。

4. 研究成果

- (1) 分担者の中井氏と共同研究を行い、論文 5 - として発表した。その成果はマルティンゲール最大関数及び自然最大関数の BMO-BLO 有界性を示し、それを用いて BLO マルティンゲールの Bennet 型特徴付けを行った。なお、この際通常用いられる予測可能 BMO 空間だけでなく、適合的であるが予測可能ではない BMO 空間でも BMO-BLO 有界性を示すことに成功している。そして以上のことは一般のフィルトレーションで示すことができる。

マルティンゲール Campanato 空間の pointwise multiplier を使い、atomic なフィルトレーションを持つ場合に、BMO に属すが BLO に属さない非負マルティンゲールを構成した。これにより得た BMO-BLO 有界性が真に improving であること、特に従来知られていた BMO-BMO 有界性からは導かれなかったことを示した。

である。以前の研究成果を用いることで従来の結果を改良したものとなっている。論文発表後も条件付き 2 次変分により定義される BMO-BLO 有界性に取り組んでおり、今後の研究の指針となる論文となっている。また、BMO の基礎空間を一般の Banach 関数空間とした場合への拡張も見込まれる。

- (2) 分担者の中井氏と共同研究を行い、論文 5 - として発表した。その成果は atomic なフィルトレーションを持つ場合に「局所可積分性」を導入し、それにより一般化マルティンゲール Morrey 空間の定義を改良した。さらにマルティンゲールに対する一般化分数べき積分作用素の定義を改良し、初期値が 0 でないマルティンゲールに対しても正しい写像となるようにした。この改良は以下で述べるように有界性に関する必要十分条件を与えることを可能にした重要なものである。

で改良した一般化マルティンゲール Morrey 空間においてマルティンゲール最大関数の有界性を示した。とくに atomic なフィルトレーションすべてで成り立つこと、そして弱系の有界性を合わせて示したことで可積分指数が 1 となる場合も含めていること、が有用性を高めている。

で示した最大関数の有界性をもとに、マルティンゲールに対する一般化分数べき積分作用素の一般化マルティンゲール Morrey 空間での有界性について、非常に広範に成り立つ

十分条件を得た。とくにレギュラーとは限らないフィルトレーションや可積分指数が 1 となる場合も含めた形で条件が得られている。さらにいくつかの付帯条件の下、この十分条件が必要条件にまで精密化できることを示した。

である。本論文では、で述べたように、空間や作用素の定義の改良を行うことにより以前からの研究を精密化することが可能となった。これらの改良により一般化分数べき積分作用素の一般化マルティンゲール Morrey 空間での有界性について必要十分条件を与えるなど精密な結果を得ることができている。そして本論文で行った改良は今後の研究を展開していくうえで基盤となるもので、意義は大きいと考えている。

(3) 分担者の中井氏と共同研究を行い、論文 5 - として発表した。その成果は

atomic なフィルトレーションを持つ場合にマルティンゲールに対するシャープ最大関数をパラメータ付きで導入した。さらに、マルティンゲールに対する Morrey 型の Triebel-Lizorkin 空間を導入した。後述するようにこの空間の導入により交換子の研究を精密に行うことができるようになった。

atomic なフィルトレーションを持つ場合にマルティンゲールに対するシャープ最大関数に対する good ラムダ不等式を時点のずらしを許容する形で証明した。そしてそのことを用いてフィルトレーションがレギュラーであるときにシャープ最大関数のマルティンゲール Morrey 空間での同値性を示した。なおシャープ最大関数に対する good ラムダ不等式はフィルトレーションがレギュラーでないときにも成り立つことを示した。

atomic なフィルトレーションを持ち、さらにレギュラーである場合に、マルティンゲールに対する分数べき積分作用素と乗法作用素との交換子について、そのパラメータ付きシャープ最大関数の各点評価を簡明な形で示した。これまでの各点評価は基底を用いる方法で得られているため l -adic なマルティンゲールという非常に特殊なマルティンゲールについてのみ知られていたが、交換子の計算を丁寧に行うことで「atomic なレギュラーフィルトレーションすべて」まで大きく一般化することができたことになる。

で得られたシャープ最大関数のマルティンゲール Morrey 空間での同値性と で得られた交換子のパラメータ付きシャープ最大関数についての各点評価を用いることにより、交換子のマルティンゲール Morrey 空間での有界性に関する必要十分条件を、multiplier がマルティンゲール Campanato 空間に属するという形で与えた。マルティンゲール Morrey 空間という枠組みだけで考えるとパラメータの範囲はやや制限されたものとなる。そこで で導入した Morrey 型の Triebel-Lizorkin 空間を用いて、マルティンゲール Morrey 空間から Morrey 型の Triebel-Lizorkin 空間への有界性という視点でみると、このパラメータの制限が大きく緩和され、交換子の有界性に対する必要十分条件の適用範囲を広げること成功した。

atomic なフィルトレーションを持つときには「コンパクト台を持つマルティンゲール」が定義できることを明示し、そのマルティンゲール Campanato 空間の閉包を用いることにより、交換子のマルティンゲール Morrey 空間でのコンパクト性、マルティンゲール Morrey 空間から Morrey 型の Triebel-Lizorkin 空間へのコンパクト性に対する必要十分条件を得ることに成功した。

である。(2)の論文で、マルティンゲールに対する分数べき積分作用素の基本性質はほぼ確立された。そして本論文ではより深い理論展開を行うことを目指し乗法作用素との交換子の有界性を調べたが、マルティンゲール Morrey 空間で考えることによりシャープ最大関数の同値性のような基本性質についても新しい結果が得られている。さらにコンパクト性まで調べることにより「コンパクト台を持つマルティンゲール」を導入するなど、交換子をマルティンゲール Orlicz (Morrey) 空間など種々のマルティンゲール空間で考える際の基盤を作ることができおり、今後の研究の大きな指針を作った論文と考えている。

(4) Banach 関数空間におけるマルティンゲール不等式の研究を行い、学会発表 5 - を行った。その成果は

Banach 関数空間の枠組みで双対 Doob 不等式を考察し、Doob 不等式と、シャープ最大関数の同値性から双対 Doob 不等式が得られることを示した。

で示したことをマルティンゲール Morrey 空間に適用し、マルティンゲール Morrey 空間で実際に双対 Doob 不等式が成り立つことを示した。

である。論文発表には間に合わなかったが、従来の再配置不変な Banach 関数空間の枠組みを超えるものとなっており、今後の発展が見込まれる。分数べき積分作用素とのかかわりでは、一般化マルティンゲール Morrey 空間への適用できる形で定式化しており、この形で論文の作成を考えている。また、とくに変動指数空間を含む形で定式化することができおり、実解析学においては成熟しつつある変動指数空間の理論に対し、新たな方向性を示すものになる可能性がある。また双対 Doob 不等式を associate 空間を用いず示せており、今後の研究の指針になると考えている。

5 . 主な発表論文等

[雑誌論文](計 3件)

E. Nakai and G. Sadasue,
Commutators of fractional integrals on martingale Morrey spaces,
Math. Inequal. & Appl. Vol. 22, 2019, pp.631--655.D0I:10.7153/mia-2019-22-44, 査読有

E. Nakai and G. Sadasue,
Characterizations of boundedness for generalized fractional integrals on martingale Morrey spaces,
Math. Inequal. & Appl. Vol. 20, 2017, pp.929--947,D0I:10.7153/mia-2017-20-58, 査読有

E. Nakai, G.Sadasue,
Some new properties concerning BLO martingales,
Tohoku mathematical journal, Vol. 69, 2017, pp. 183-194, DOI:なし, 査読有

[学会発表](計 7件)

貞末 岳,
Analysis on martingale Morrey spaces,
International Conference on Harmonic Analysis and Its Applications,
2018/06, University of Chinese Academy of Sciences in Beijing of China

貞末 岳,
Commutators of fractional integrals on martingale Morrey spaces,
日本数学会,
2018/03, 東京大学

貞末 岳,
いくつかの martingale 空間に関する注意,
関数空間の深化とその周辺,
2018/02, 京都大学数理解析研究所

貞末 岳,
Fractional integrals on martingale spaces,
Harmonic Analysis and its Applications in Tokyo 2017,
2017/08, 日本大学

貞末 岳,
Characterizations of boundedness for generalized fractional integrals on martingale Morrey spaces,
日本数学会,
2017/03, 首都大学東京

貞末 岳,
Fractional integrals on martingale spaces,
関数空間の構造とその周辺,
2017/02, 京都大学数理解析研究所

貞末 岳,
Generalized fractional integrals on martingale Morrey spaces,
Harmonic Analysis and its Applications in Beijing 2016,
2016/10, 北京航空航天大学

[図書](計 0件)

[産業財産権]

出願状況(計 0件)

取得状況(計 0件)

〔その他〕
ホームページ等
該当なし

6. 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：中井 英一

ローマ字氏名：NAKAI Eiichi

所属研究機関名：茨城大学

部局名：理学部

職名：教授

研究者番号(8桁)：60259900

(2)研究協力者

該当なし