様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　５ 月 ３０ 日現在

機関番号：１４５０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2019
課題番号：１６Ｋ０５２０４

研究課題名（和文）一様分布論の測度論的研究

研究課題名（英文）Metric studies on uniform distribution theory

研究代表者
福山　克司（Fukuyama, Katusi）

神戸大学・理学研究科・教授

研究者番号：６０２１８９５６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：実数列にある実数をかけた列を考え、その小数部分の分布を調べるのが一様分布論である。その名の通り、多くの数列に関して、ほとんどすべての実数をかけた場合に小数部分の分布は一様分布に漸近するがその速さを差異量を用いて解析することを考える。我々は等比数列の場合にほとんどすべての初期値に関して重複大数の法則が成り立つことを証明し、さらにそこに現れる定数を与える公式を公比が大きい場合に証明してきたが、公比が小さい場合に公式では得られない定数が現れること、与えられた速さが実現できるような数列が存在することなどを新たに示すことに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
解析的整数論の一分野として研究されてきた一様分布論に強力に確率論の手法を導入し、重複大数の法則を証明することにより、極めて初等的な等比数列について、今まで未知であった小数部分の分布の一様分布への漸近の速度について研究を進めている。公比が大きい場合にはすでに決定的な結果を得ており、この研究プロジェクトで小さい公比の場合に起こる様々なパターンの挙動例を見出すことに成功しており、新奇な実例を挙げたこととなっている。

研究成果の概要（英文）：For given sequence of real numbers, multiplying a real number and investigate the distribution of fractional part. This is the thema of uniform distribution theory. For various sequences, the limit distribution is the uniform distribution for almost every multiplied real number, and we analyse the speed of convergence toward the uniform distribution by using the notion of discrepancies. We have already prove the law of the iterated logarithm for discrepancies for geometric progressions, and proved the formula which give the limsup constant when the ratio is large. In this project, we found several ratios for which the limsup constant is different from the value given by the formula. We also proved the existence of the sequence which realize the given speed of convergence of discrepancies.

研究分野：確率論

キーワード：一様分布論　間隙級数論　確率論

様　式　C—１９、F—１９—１、Z—１９ (共通)

1. 研究開始当初の背景

Weyl の定理の主張は $n_{k+1} - n_k > c > 0$ であれば $\{\langle n_k x\rangle\}$ は単位区間上一様分布するというものであった。これは discrepancy

$$\sup_{0\le a'<a<1}\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\mathbf{1}_{[a',a)}(\langle n_k x\rangle) - (a-a')\right|;$$

で与えられる discrepancy $D_N(\{n_k x\})$ が 0 に収束することを導くものである。等差数列に関しては Khinchin と Kesten により、収束の速さは決定されていたが、等比数列に関しては研究が送れていた。

Philipp は Hadamard 間隙条件 $n_{k+1}/n_k > q > 1$ をみたす $\{n_k\}$ に対し重複対数型の評価

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} < \varlimsup_{N\to\infty}\frac{ND_N(\{n_k x\})}{\sqrt{2N\log\log N}} \le C_q \quad \text{a.e.}$$

を示して、 Erdős-Gál の予想を解決している。

研究代表者の以前の研究により $|\theta| > 1$ をみたす実数 θ に関して以下の重複対数の法則が示されている。

$$\varlimsup_{N\to\infty}\frac{ND_N\{\theta^k x\}}{\sqrt{2N\log\log N}} = \Sigma_\theta, \quad \text{a.e.}$$

ここで θ が有理巾根でない場合即ち $\theta^j \notin \mathbf{Q}$ $(j = 1, 2, \dots)$ なら $\Sigma_\theta = \frac{1}{2}$ であり、有理巾根であれば $\Sigma_\theta > \frac{1}{2}$ である。

以下 θ は有理巾根とし $r = \min\{j \in \mathbf{N} \mid \theta^j \in \mathbf{Q}\}$ と r を定め $\theta^r = p/q$ の様に $p \in \mathbf{Z}$ と $q \in \mathbf{N}$ を用いて既約分数に表すとする。

p, q がともに奇数であれば

$$\Sigma_\theta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{|p|q+1}{|p|q-1}}$$

である。p/q の値が大きい時には Σ_θ の具体的値を与える公式が求まっている。p が奇数 q が偶数で $|p/q| \ge 9/4$ である場合と、p が偶数 q が奇数で $|p/q| \ge 4$ である場合には Σ_θ は以下の様に与えられる。

$$\sqrt{\frac{(|p|q)^I+1}{(|p|q)^I-1}v\Big(\frac{|p|-q-1}{2(|p|-q)}\Big) + \frac{2(|p|q)^I}{(|p|q)^I-1}\sum_{m=1}^{I-1}\frac{1}{(|p|q)^m}v\Big(q^m\frac{|p|-q-1}{2(|p|-q)}\Big)}.$$

ここで $v(x) = \langle x\rangle(1-\langle x\rangle)$, $I = \min\{n \in \mathbf{N} \mid q^n = \pm 1 \bmod |p|-q\}$ である。この公式により、例えば以下の値を求めることができる

$$\Sigma_{\pm 7/2} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{1294}{195}}, \qquad \Sigma_{\pm 9/2} = \frac{2}{49}\sqrt{\frac{18561}{119}}, \qquad \Sigma_{\pm 11/2} = \frac{2}{117}\sqrt{\frac{2635}{3}},$$
$$\Sigma_{\pm 13/2} = \frac{1}{55}\sqrt{\frac{73250534}{95051}}, \quad \Sigma_{\pm 15/2} = \frac{1}{91}\sqrt{\frac{31238857842}{14877551}}, \quad \Sigma_{\pm 14/3} = \frac{1}{11}\sqrt{\frac{4096559910}{130691231}},$$
$$\Sigma_{\pm 9/4} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{222}{35}}, \dots$$

また、例外的な値として

$$\Sigma_2 = \frac{1}{9}\sqrt{42}, \quad \Sigma_{-2} = \frac{1}{49}\sqrt{910}.$$

$|p|/q$ が小さい場合に値を求め、収束の速さを完全に決定することはできていなかった。

2. 研究の目的

間隙級数の方法を用いて典型的な数列に対して discrepancy の漸近挙動を完全に決定することである。また、多次元の数列に関しての研究をすすめることである。

3. 研究の方法

discrepancy を単位区間内の有限個の点を端点にもつ有限個の区間に限定した最大値により得られる量とそこで用いられた点の間に限定し取った上限の二つの量に分解して評価する discrepancy splitting の手法を徹底的に応用し評価して行く。

また、martingale 近似による概不変定理の導出により、重複対数の型の定理を導く。

4. 研究成果

(1) 有理数 p/q の巾根である公比をもつ等比数列に関する重複対数に現れる定数について $|p|/q$ が小さい場合について考える。

まず $p/q = 13/6$ の場合は $13/6 < 9/4$ であるが上記公式は成り立ち、

$$\Sigma_{13/6} = \frac{2}{7}\sqrt{\frac{237}{77}}$$

が得られ、上の公式の閾値は限界に達していないことがわかった。

一方 3/2, 4/3, 8/3, 10/3, 17/8 については公式と異なった値が得られることがわかった。

$$\begin{aligned}
\Sigma_{3/2} &= \frac{2}{665}\sqrt{\frac{30567145176261688966144563679087 3}{1031442479849053554617194905 5}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_{4/3} &= \frac{18}{7}\sqrt{\frac{117609}{2985983}}\\
\Sigma_{8/3} &= \frac{2}{275}\sqrt{\frac{1576677892630126830513199442 22}{321599097427248293896865 71}}\\
\Sigma_{10/3} &= \frac{6}{637}\sqrt{\frac{43479927170}{14877551}}\\
\Sigma_{17/8} &= \frac{2}{675}\sqrt{\frac{2972498069993207680191880231521354312204246283}{104127550853833809985880737775289062764635}}
\end{aligned}$$

特に 3/2 は一様分布論の中でもよく調べられてきたものであるが、測度論的には明快な結果が得られている。

(2) 与えられた速さで一様分布に収束する列の構成

実数列 $\{\Psi(N)\}$ がある N_0 と $\varepsilon > 0$ に対して

$$0 < \Psi(N) \le \Psi(N+1) \quad (N \ge N_0), \tag{1}$$

$$\Psi(N) \ge (\log N)(\log\log N)^{1+\varepsilon} \quad (N \ge N_0), \tag{2}$$

$$\Psi^2(N+1) - \Psi^2(N) = o(\log\log \Psi^2(N)) \tag{3}$$

をみたすとする。この時任意の $\Sigma > 0$ に対して $1 \le n_{k+1} - n_k \le 2$ をみたす正の整数列 $\{n_k\}$ が存在して

$$\varlimsup_{N\to\infty} \frac{N D_N\{n_k x\}}{\Psi(N)} = \Sigma \quad \text{a.e.}$$

を満たす。

条件 (3) からは

$$\Psi(N) = o((N \log\log N)^{1/2}) \tag{4}$$

が導かれる。例えば $\Psi(N) = N^\alpha(\log N)^\beta(\log\log N)^\gamma$ で (1), (4) をみたすものはこの定理の適用範囲にある。
また関連する問題として $\sum_{k=1}^N \cos 2\pi n_k x$ が与えられたスピード $\Psi(N)$ で発散する $\{n_k\}$ の存在について考える。Erdős-Gál によれば Hadamard 間隙条件 $n_{k+1}/n_k \ge q > 1$ の下で重複対数の法則

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{\sqrt{N\log\log N}} \sum_{k=1}^N \cos 2\pi n_k x = 1 \quad \text{a.e.}$$

が成立することがわかっている。この拡張として以下の結果が得られる。
実数列が $\{\Psi(N)\}$ ある N_0 と $D > 0$ に対して (1) と

$$\Psi(N) \to \infty, \quad \Psi^2(N+1) - \Psi^2(N) = o\big((\log\log\Psi^2(N))^D\big). \tag{5}$$

を満たすとすると正の整数の狭義増大列 $\{n_k\}$ が存在して

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{\Psi(N)} \sum_{k=1}^N \cos 2\pi n_k x = 1 \quad \text{a.e.}$$

をみたす。
(5) からは

$$\Psi(N) = o\big(N^{1/2}(\log\log N)^{D/2}\big) \tag{6}$$

が従う。$\Psi(N) = N^\alpha(\log N)^\beta(\log\log N)^\gamma$ で (1), (6) をみたすものはこの定理の適用範囲にある。D はいくら大きくても良いという点を強調しておく。

(3) 等比数列の無理数回転による摂動が与える影響
$|\theta| > 1$ に対して $\{\theta^k x\}$ の差異量の挙動は上に述べたとおりであるが、無理数回転 $\{k\gamma\}$ により摂動し $\{\theta^k x + k\gamma\}$ を考えると重複大数の法則が成り立ち、なおかつ θ の値によらず現れる定数はすべて 1/2 となってしまうことが示された。また、等比数列の適当な部分列を摂動すると定数が 1/2 とならない場合もあり、等比数列特有の性質であることも示された。

(4)　多次元 Riesz-Raikov 和の中心極限定理
d-次元行列 A が拡張的すなわち $\|\mathbf{x}\| < \|A\mathbf{x}\|$ が $\mathbf{x} \ne \mathbf{0}$ に対して成り立つときに $\sum f(A^k\mathbf{x})$ についての中心極限定理を証明した。将来的に discrepancy の解析を行うための第一歩として研究した。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計5件（うち査読付論文　5件／うち国際共著　2件／うちオープンアクセス　5件）

１．著者名 K. Fukuyama, S. Mori, Y. Tanabe	４．巻 -
２．論文標題 Metric discrepancy results for geometric progressions perturbed by irrational rotations	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Acta Mathematica Hungarica	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1007/s10474-019-01003-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

１．著者名 Katusi Fukuyama	４．巻 84
２．論文標題 A metric discrepancy result for geometric progression with ratio 3/2	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	６．最初と最後の頁 65～78
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.2969/aspm/08410065	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

１．著者名 Fukuyama Katusi	４．巻 372
２．論文標題 The central limit theorem for Riesz-Raikov sums II	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society	６．最初と最後の頁 1193～1211
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1090/tran/7772	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

１．著者名 Fukuyama K.、Sakaguchi S.、Shimabe O.、Toyoda T.、Tscheckl M.	４．巻 155
２．論文標題 Metric discrepancy results for geometric progressions with small ratios	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Acta Mathematica Hungarica	６．最初と最後の頁 416～430
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1007/s10474-018-0805-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1．著者名 I. Berkes, K. Fukuyama & T. Nishimura	4．巻 151
2．論文標題 A metric discrepancy result with given speed	5．発行年 2017年
3．雑誌名 Acta Mathematica Hungarica	6．最初と最後の頁 199～216
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10474-016-0658-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計5件（うち招待講演　3件／うち国際学会　3件）

1．発表者名 Katusi Fukuyama
2．発表標題 Perturbed metric discrepancy results for geometric progressions
3．学会等名 Equidistribution: Arithmetic, Computational and Probabilistic Aspects（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

1．発表者名 Katusi Fukuyama
2．発表標題 Metric discrepancy results for geometric progressions with small ratios 3/2, 4/3, etc
3．学会等名 Seminar on Number Theory and Algorithm（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2017年

1．発表者名 Katusi Fukuyama
2．発表標題 Metric discrepancy results for geometric progressions
3．学会等名 Various aspects of multiple zeta functions（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2017年

１．発表者名 I. Berkes、福山克司、西村拓也
２．発表標題 A metric discrepancy result with given speed
３．学会等名 日本数学会秋期総合分科会統計数学分科会
４．発表年 2016年

１．発表者名 福山克司、阪口晋次、島部理、チュクルマルティーナ
２．発表標題 Metric discrepancy results for geometric progressions with ratios 3/2, 4/3, 8/3, 10/3, 13/6 and 17/8
３．学会等名 日本数学会年会統計数学分科会
４．発表年 2017年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考