

令和 2 年 5 月 27 日現在

機関番号：14602

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05205

研究課題名(和文) ランダム媒質における有限区間上の広義拡散過程の様相の解明

研究課題名(英文) Study of one dimensional generalized diffusion processes on finite intervals in random environments

研究代表者

富崎 松代 (TOMISAKI, Matsuyo)

奈良女子大学・名誉教授

研究者番号：50093977

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：有限区間上の広義拡散過程のディリクレ形式について考察した。また、ランダム媒質における有限区間上の広義拡散過程に関連して、集団遺伝学における確率的自然淘汰を伴う離散時間 Moran モデルと Wright-Fisher モデルをランダム媒質中の離散時間マルコフ過程として定式化した。各々のモデルと個体数に依存する適切な時間尺度変更を用いて2つの連続時間確率過程を導入し、極限を考察した。2次モーメントの極限が2つの確率過程列で異なる場合があることを明らかにした。独立な確率的自然淘汰の場合には、これらの確率過程列は関数空間Dにおいて弱収束する場合があることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

有限区間端点での境界条件を反映させた広義拡散過程としてのディリクレ形式の表現を得ることができた。これにより、区間端点での境界条件を広義拡散過程列とともに変化させた場合に、対応するディリクレ形式の列としての極限の考察が可能になった。

集団遺伝学の確率モデルにおいて、自然淘汰が決定論的な場合には Moran モデルと Wright-Fisher モデルから導かれる2つの確率過程列の2次モーメントの個体数無限大での極限は一致することが知られている。しかし、確率的自然淘汰の存在下では、2つのモデルの個体数無限大での極限が一致するとは限らないことを示し、生物学的に重要な知見をもたらした。

研究成果の概要(英文)：We considered Dirichlet forms of one dimensional generalized diffusion processes on finite intervals. Concerning to one dimensional generalized diffusion processes on finite intervals in random environments, we formulated discrete time Moran model and Wright-Fisher model with stochastic selection in population genetics as discrete time Markov processes in random environments. By means of suitable time changes depending on models and population size, we introduced continuous time stochastic processes and considered their limits. When the population size tends to infinity, we showed that the limits of second moments of two models may not be essentially the same under independent stochastic selection. Further we proved the weak convergence of these models in some cases.

研究分野：数物系科学

キーワード：広義拡散過程 Moranモデル 極限過程

## 様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

1970年代、ランダム媒質中のマルコフ連鎖の数学理論が確立され、二重のランダム性(即ち、媒質とマルコフ連鎖のランダム性)が媒質中の運動に及ぼす影響が明らかになり、媒質が固定された場合のマルコフ連鎖の挙動と大きく異なることが示された。1980年代になり、Sinai、Golosovにより、その挙動の精密な解析が行われ、いわゆる「局在性」が明らかになった。続いて、Brox、Schumacherによりランダム媒質中の拡散過程が取り扱われるようになり、確率微分方程式の解として記述される確率過程が考察の対象となり、標本路が「谷底」に滞在する状況が明確にされた。これらの研究は、ブラウン媒質中の拡散過程等の研究へと発展し、多くの研究成果が得られた。しかし、これらの運動は、数直線全体、あるいは、反射壁境界条件をもつ半直線上で取り扱われており、有限区間上の運動は対象とされなかった。研究代表者と研究分担者は、先行研究の中で集団遺伝学における Moran モデル(広義拡散過程として記述されるモデル)に焦点を当てて研究を推進した。具体的には、固定された媒質中で、確率過程としての Moran モデルの収束の意味、極限過程の性質等について考察し成果を得た。これらの問題を考察する中で、ランダム媒質中で運動を見た場合、固定された媒質中の運動とは異なる様相が見えてきた。更に、その様相は、上述したランダム媒質における無限区間上のマルコフ連鎖、拡散過程で見られたものと異なっており、このような現象が何故生じるかという問題の解明に取り組むこととした。

### 2. 研究の目的

ランダム媒質における有限区間上の運動に対し、これまでに見られなかった新しい現象が生じる背景を、広義拡散過程の視点から解明する。ランダム媒質における有限区間上の広義拡散過程の定式化と、広義拡散過程列の収束の様相を考察する。応用分野に適用可能な極限定理等の理論を構築し、当該研究分野だけでなく、応用分野での新たな研究対象と研究手法を提示する。例えば、集団遺伝学では、固定された媒質中で自然淘汰が生物集団に与える効果が広義拡散過程を用いて研究されている。自然淘汰は一定でなく、本来はランダム媒質中で考察されるべきだが、このような研究は行われていない。それは、ランダム媒質における有限区間上の広義拡散過程の研究が行われていないことに起因する。本研究ではこのような状況に応用可能な理論を構築する。

### 3. 研究の方法

(1) ランダム媒質における無限区間上の運動の解析では、モデルごと、現象ごとに、証明方法が異なり、統一的な方法は確立していない。有限区間上の運動についても同様であり、マルコフ連鎖と広義拡散過程に分けて、解析の手法を変える。

(2) 有限区間上の運動であるから、区間端点での境界条件を考慮しなければならない。境界条件に応じて、運動は、再帰的・非再帰的となる。ランダムな媒質中の運動であっても、広義拡散過程の場合には、その特性量(尺度関数、速度測度関数)を用いて、確率法則を表現することが可能である。再帰性・非再帰性を特性量の挙動として捉えることにより、運動全体の解析を行う。

### 4. 研究成果

研究の目的と研究の方法で記述した内容について、以下の研究成果を得た。

#### (1) 有限区間上の広義拡散過程とマルコフ連鎖

① ランダム媒質(環境)における有限区間上の広義拡散過程を、ディリクレ形式を用いた解析的な手法でとらえるために、まず固定された環境の下で広義拡散過程に対応するディリクレ形式を考察した。区間の端点での境界条件や区間内部での速度測度の退化の様相がディリクレ形式に反映される状況を明らかにした。しかし、広義拡散過程列の収束の状況をとらえるためには、区間端点での境界条件を広義拡散過程列とともに変化させて考察する必要があり、このような状況を反映させた新しいディリクレ形式の表現を得ることができた。この結果は、S. Watanabe (1975)によって得られた広義拡散過程の連続関数空間上の生成作用素に基づく定式化と、M. Fukushima (2010, 2014), Z.-Q. Chen and M. Fukushima (2012)によって得られた一次元拡散過程に対応するディリクレ形式の時間変更から導かれる広義拡散過程のディリクレ形式による定式化(2乗可積分関数空間上の生成作用素に基づく表現)が一致することを示しており、両者の研究成果を相互に結びつけることが可能になった。

② 増大する数列の隣り合う2項によって作られる有限区間を考え、その左端で反射、右端で吸収、内部では一方向ドリフトとする拡散運動を、全区間上の広義拡散過程としてとらえた。この設定の下で取り扱う広義拡散過程は可算無限個であるがそれらは互いに独立で同一の法則に従うものとする。増大する数列をランダムにすることにより、ランダムな場所で反射するマルコフ過程の考察が可能となり標本路の時刻無限大での解析が可能となった。これにより、Solomon(1975)の研究手法をある種の広義拡散過程に対して適用可能であることを示した。

③ 有限区間上の広義拡散過程と球面ブラウン運動との斜積を考察し、その標本路の挙動を確率過程のFeller性と関連付けて解明し、またディリクレ形式も決定した。

## (2) 有限区間上の広義拡散過程列の収束

① 固定された環境の下で、広義拡散過程列の極限過程について考察した。極限過程が広義拡散過程の場合には、尺度関数列の極限と速度測度関数列の極限によって特徴づけられることが知られている。また、先行研究において、尺度関数列の極限が退化している場合であっても、一定の条件下で、極限過程を特徴づけることが可能であることが示されている。しかし、本研究において、尺度関数列の極限と速度測度関数列の極限では特徴づけることができない広義拡散過程列とその極限過程の存在を示した。これにより、広義拡散過程の極限定理の考察において、尺度関数列・速度測度関数列の極限の考察だけでは不十分であるという新たな課題を提起した。

② 有限区間上の広義拡散過程列を、区間端点での境界条件の変化と合わせてとらえたディリクレ形式の表現を用いて、一次元拡散過程の直積として表現される多次元拡散過程に対して、その均質化問題を確率過程列の極限定理の立場から見直した。拡散過程の特性量の列の極限がディリクレ形式の極限に反映されることを示し、均質化問題を特徴づける特性量の簡単な導出方法を提示した。

## (3) 集団遺伝学の確率モデルに関する研究

① 確率的自然淘汰を伴う離散時間 Moran モデルとライト・フィッシャーモデルをランダム媒体中の離散時間マルコフ過程として定式化した。これらのモデルの極限を考察するために、各々のモデルと個体数に依存する適切な時間尺度変更を用いて2つの連続時間確率過程を導入した。なお、研究代表者と研究分担者は先行研究において、連続時間 Moran モデルを広義拡散過程としてとらえ幾つかの研究成果を得ている。ランダムな環境下で同様の考察を行う場合、三重のランダム性(媒質、滞在時間、隣接点への跳躍)を考慮する必要があることから、この観点からの研究は今後の研究課題とすることとし、本研究課題では離散時間マルコフ連鎖としての定式化について考察した。

② 確率的自然淘汰を2値マルコフ過程で与えた場合、前項①の連続確率過程の $n$ 時間ステップの増分の1次と2次のモーメントの漸近挙動を解析した。

各時点で独立な環境変動の場合、2次モーメントの極限が2つの確率過程列で異なる場合があることを明らかにした。また、これらの確率過程列は右連続で左極限を持つ関数の空間 $D$ でtight (relatively compact)であることを証明した。次に、幾つかの場合にこれらの確率過程列は有限次元分布の意味で収束し、tightnessによりこの収束は関数空間 $D$ における確率測度の弱収束に拡張できることを示した。2つの確率過程列の2次モーメントの極限が一致しない場合があるという結果は、決定論的自然淘汰の場合と異なり確率的自然淘汰の存在下では、Moranモデルとライト・フィッシャーモデルの個体数無限大での極限が一致するとは限らないという生物学的に重要な知見をもたらした。

確率的自然淘汰が各時点で独立でない場合、特に、環境変動の持続確率が $1/2$ より大きい定数の場合(持続型環境変動)、ライト・フィッシャーモデルの1次と2次のモーメントの極限は、次世代を構成するときの無作為抽出の効果(サイズ効果)と確率的自然淘汰の両者を含む場合があることが分かった。ここで、確率的自然淘汰は数理集団遺伝学者ガレスピーの分類によるmoderate autocorrelationに対応しており、各時点で独立な環境変動の場合の結果とは異なる。一方、Moranモデルではサイズ効果のみを含むことが判明した。即ち、この場合も確率的自然淘汰の存在下での2つのモデルの漸近挙動が異なることが明らかになった。

③ 自然淘汰の相互作用を伴う多次元確率モデルに関する研究を行った。離散時間多次元マルコフ過程を用いて定義される遺伝子重複を伴う互助的相互作用の確率モデルに対して、標本路や境界への到達時間の性質を確率過程論的考察とコンピュータ・シミュレーションを用いて解析し、互助的相互作用の確率モデルに与える遺伝子重複の効果を明らかにした。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Takemura, T., Tomisaki, M. and Iizuka, M.	4. 巻 34
2. 論文標題 Moment estimation of Moran model and Wright- Fisher model with stochastic selection and their diffusion approximation	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Ann. Reports of graduate School of Humanities and Sciences, Nara Women's University	6. 最初と最後の頁 75, 85
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Kusumi, J., Ichinose, M. and Iizuka, M	4. 巻 467
2. 論文標題 Effects of gene duplication, epistasis, recombination and gene conversion on the fixation time of compensatory mutations	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Theoretical Biology	6. 最初と最後の頁 134, 141
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jtbi.2019.02.001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件（うち招待講演 4件/うち国際学会 2件）

1. 発表者名 飯塚 勝
2. 発表標題 miRNAの共進化の確率モデル
3. 学会等名 九州分子進化セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 富崎 松代
2. 発表標題 一次元拡散過程とhomogenization
3. 学会等名 奈良女子大学確率論拡大セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 飯塚 勝
2. 発表標題 遺伝子重複を伴う互助的中立進化モデルの見本路の性質
3. 学会等名 九州分子進化セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 飯塚 勝
2. 発表標題 集団遺伝学の確率モデルと広義拡散過程
3. 学会等名 奈良女子大学確率論拡大セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Matsuyo Tomisaki
2. 発表標題 Time changed skew product diffusion processes
3. 学会等名 WORKSHOP ON JUMP PROCESSES AND STOCHASTIC ANALYSIS 2017（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 飯塚 勝
2. 発表標題 集団遺伝学における多次元確率モデルの解析
3. 学会等名 九州分子進化セミナー
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Matsuyo Tomisaki
2. 発表標題 h-transform of diffusion processes and its applications
3. 学会等名 Brownian Motion and Stochastic Processes - Conference in memory of Marc Yor - (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 飯塚 勝
2. 発表標題 遺伝子重複の効果を含む互動的相互作用による分子進化機構の確率モデルの定式化
3. 学会等名 九州分子進化セミナー
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	飯塚 勝  (IIZUKA Masaru)  (20202830)	福岡女子大学・国際文理学部・学術研究員   (27103)	
研究協力者	楠見 淳子  (KUSUMI Junko)		