

令和元年6月17日現在

機関番号：15501

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05206

研究課題名（和文）普遍被覆空間におけるレブナー理論の新展開

研究課題名（英文）Loewner theory on universal covering maps

研究代表者

柳原 宏 (Yanagihara, Hiroshi)

山口大学・大学院創成科学研究科・教授

研究者番号：30200538

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,600,000円

研究成果の概要（和文）：レブナー理論とは、等角写像と呼ばれる1対1正則複素函数を時間とともに拡大していく時、ある種の微分方程式を満たすという発見から始まったものである。この理論を1対1とは限らない正則函数の変形に使えるように拡張を行うことが本研究課題の目標であった。

本研究ではレブナーの方程式が一般の正則函数の拡大的な変形についても成り立つことを証明することに成功し、1対1を緩めた普遍被覆写像という範囲で拡張を考えると、幾何学的に自然な理論展開を行うことができることを示した。これは普遍被覆写像の研究に新たな解析的手法が出来たことを意味する。これからの研究の基盤となることが期待される。

研究成果の学術的意義や社会的意義

レブナー方程式は2次元的な領域を時間とともに拡大する際に現れる基本的な方程式である。レブナー理論はこの方程式の解析や応用を行うものであり、「拡がる」という極めて自然な現象を数学的に捉えるものであるから、その応用は物理学、工学から社会学まで幅広い。本研究により従来の理論の限界である穴の空いていない領域のみ扱うことが出来るという制約を除くことに成功した。これからのさらなる研究の基盤として期待が出来る。また研究が進むほどに新たな疑問が生じてきた。普遍被覆写像を制御する被覆変換群または像領域の基本群が時間とともにどのような挙動を示すかなどである。これらの疑問についてはこれからの課題となる。

研究成果の概要（英文）：In the research we showed the Loewner theory, a powerful method in the theory of univalent functions, is applicable to study analytic universal covering maps.

In 1923 Loewner found that for any bounded slit mapping of the unit disc has a parametric representations satisfying a differential equation known as the Loewner differential equation. The parametric representation method was extensively developed and generalized by Pommerenke.

We tried to generalize Loewner-Pommerenke theory on univalent functions to universal covering maps on the unit disc and succeeded to show that the theory has a geometrically natural extension. We also studied a behavior on associated Fuchsian group and found that there exists a family of time-depend homomorphisms between them.

研究分野：複素解析学

キーワード：普遍被覆 普遍被覆写像 正則函数 Loewner理論 subordination Loewner chain

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

レブナー理論とは、複素平面内の領域上で定義された等角写像に時間パラメータを加え、像領域に「動き」を持たせたものを微分方程式で記述、制御するものである。20世紀初等に導入され古典的な同理論が、21世紀になり統計物理・共形場理論への応用が見出され、さらに2012年には関連する方程式を全て統合・一般化する統一レブナー理論が提唱された。

レブナー方程式は、等角写像を時間パラメータとともに、像領域を拡大するときに生じる偏微分方程式である。レブナー理論は「拡がる」という非常に自然な現象を数学的に特徴づけることから、その応用範囲は物理・工学から社会学まで幅広い。しかしながら当時の理論では像領域としては単連結なものを扱うことが難しかった。

### 2. 研究の目的

既存の古典的レブナー方程式や SLE, さらに正則関数の半群性理論をも含むような統一的な理論が Bracci, Contreras ([1] を参照) らによりもたらされた。しかしながら、この理論は複素平面内の単連結領域から単連結領域への等角写像をその対象とする。単連結領域とは簡単に言えば穴の空いていない領域のことであるから、既存のレブナー理論を「穴のあいた領域の拡がり」に適用することはかなりの困難を伴う。現在では小松-レブナーの方程式と言う有限連結(有限個の穴のあいた)領域から同じ連結度を持つ有限連結領域への等角写像に関する理論が出来てはいるが、方程式の記述が、かなり複雑になる。その原因は、連結度が等しいというだけでは領域間の等角写像の存在が保証されないことにある。そこでレブナー理論を等角写像を含むより広いクラスである普遍被覆空間上の被覆写像にまで拡張を行うことを基礎的な研究の目標とした。そして応用的な研究として、普遍被覆写像を記述する微分方程式から、写像の幾何的及び解析的な性質を導出することを目標とした。

### 3. 研究の方法

(1) レブナー理論において中心的な道具となるのは、カラテオドリの核収束定理である。これは像領域である単連結領域を動かしたときに、対応する等角写像がどのように依存するかを述べた基本的な定理である。この定理を普遍被覆写像を含むもっと一般の被覆写像に一般化が可能であることが先行的な研究により分かっていた。この核収束定理の拡張を使用し具体例を考察しつつ、領域の連結度の変化の仕方などを探る位相的な方法での研究。

(2) レブナー理論では正則関数の1パラメータ族を考察するが、その時に付随する推移的な単位円板から自身への正則写像の合成を積とする半群が現れる。この半群の性質を研究することにより、もとの1パラメータ族の満たす性質を探す。

### 4. 研究成果

(1) 単位円板上の正則関数の1パラメータ族であり、パラメータに関して subordination の関係を満たし、かつ狭義増加で連続であるものについて、レブナーの偏微分方程式を一般化した方程式を満たすことが証明できた。また付随する推移的な半群がある種の常微分方程式を満たすこと、及びその生成作用素の性質をある程度解明することに成功した。このような解析的な性質において支配的なのは subordination の関係であり、この関係が微分方程式と密接に結びついていることが理解されてきた。

(2) 特に普遍被覆写像による1パラメータ族の場合に像領域の連結度が非減少かつ左連続であることを証明することに成功した。証明には平面内の領域の補集合の連結成分に関する位相的な補題を先に示す必要があり、これに少々難航したが Jordan の曲線定理の証明の手法を援用することによりようやく成功した。

(3) 普遍被覆写像による1パラメータ族には、対応して Fuchs 群の1パラメータ族が付随する。この Fuchs 群の族について推移的な単射準同型の族が存在することを発見できた。この準同型の族に関する詳しい解析が今後の課題となると考えている。

以上の成果をまとめた論文を執筆し投稿準備中である。

(4) 単位円板上の凸関数に関し、任意に与えられた2点間での値の差の評価を行った。凸関数の対数微分が特定の関数と subordination の関係があることから上記の成果(1)の手法を用いて評価を行うことに成功した。同僚の岡田教授との共同研究の成果である。

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 5 件)

[1] I. Hotta, Loewner chains with quasiconformal extensions: an approximation approach, to appear in J. Anal. Math.

[2] I. Hotta, Loewner chains for quasiconformal extensions: old and new, to appear in Interdiscip Inform. Sci.

[3] M. Okada and H. Yanagihara, Two points distortion estimates for convex univalent functions, Bull. Korean Math. Soc., 55(2018), 957-965.

[4] I. Hotta and Li-Mei Wang, Quasiconformal extendibility of integral transforms of Noshiro-Warschawski functions, Rocky Mountain J. Math. 47 (2017), no. 1, 185-204.

[5] P. Gumenyuk and I. Hotta, Chordal Loewner chains with quasiconformal extensions, Math. Z. 285 (2017), no. 3-4, 1063-1089.

〔学会発表〕(計 7 件)

[1] H. Yanagihara, Transfinite Diameter, Colloquium Talk, School of Basic Science, IIT Bhubaneswar, India, 2019. (招待講演)

[2] 堀田 一敬, レブナー方程式による擬等角拡張の構成について, 日本数学会 2019 年度年会特別講演, 2019. (招待講演)

[3] H. Yanagihara, Loewner theory on analytic universal covering maps, Colloquium Talk, International Workshop on Conformal Dynamics and Loewner Theory, 2018. (招待講演)

[4] H. Yanagihara, Loewner theory on analytic universal covering maps, Colloquium Talk, Department of Mathematics, Wuerzburg University, Germany, 2018. (招待講演)

[5] I. Hotta, Hydrodynamic limit of multiple SLE, International Workshop on Conformal Dynamics and Loewner Theory 2018, 2018. (招待講演)

[6] 柳原 宏, Yamada 's method on quasiconformal variations, 等角写像論・値分布論研究会, 2017 年. (招待講演)

[7] I. Hotta, Linearly accessible flows associated with Loewner's equation, XVIIIth Conference on Analytic Functions and Related Topics, The state school of higher education in Chelm, Poland, 2016. (招待講演)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年:

国内外の別:

取得状況 (計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

Hiroshi Yanagihara (柳原 宏)ホームページ  
<http://web.cc.yamaguchi-u.ac.jp/~hiroshi/>

## 6 . 研究組織

### (1)研究分担者

研究分担者氏名：堀田 一敬

ローマ字氏名：Ikkei Hotta

所属研究機関名：山口大学

部局名：創成科学研究科

職名：講師

研究者番号 (8 桁): 10725237

### (2)研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。