

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 2 年 6 月 4 日現在

機関番号：17401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05208

研究課題名(和文) 拡散過程から定まる筒形集合の体積の大域的性質に関する研究

研究課題名(英文) The study of global properties of Wiener sausages for diffusion processes

研究代表者

濱名 裕治 (Hamana, Yuji)

熊本大学・大学院先端科学研究部(理)・教授

研究者番号：00243923

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)： Bessel 過程の到達時刻の分布関数の第2項目を決定した。また、その際に、第2種変形 Bessel 関数の零点が指数に関して解析的であることがわかった。さらに、Bessel 過程の一般化である、ドリフトをもつ Brown 運動の半径方向の運動について、到達時刻の分布関数の表示を調べ、未解決であった出発点が原点の場合について、Bessel 過程の到達時刻の密度関数を用いて表示することができた。一方、Bessel 過程のもう一つの一般化である Ornstein-Uhlenbeck 過程の半径方向の到達時刻の分布関数については、合流型超幾何関数とその第一変数に関する零点で表示できた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Brown 運動に対する Wiener sausage の体積の期待値は、球の内部の温度が1で外部の温度が0という初期状態で、球の内部の温度を1に保ったままのとき、球から流出した熱の総量を表す。これはある種理想的な状態で考察することになり、熱の伝わり方にひずみがあるときには、Brown 運動にドリフトをつけた確率過程に対する Wiener sausage の体積の期待値を調べることになる。本研究では「一定の方向に熱が伝わりやすい」「中心から離れるにしたがって熱が伝わりにくい」といった状態の場合を考察して、前者には完全な解答を与えることに成功した。後者については前段階の結果を得ることができた。

研究成果の概要(英文)： We gave the second term of the distribution of the first hitting time of Bessel process and showed analyticity of zeros of Bessel functions of the second kind with respect to the indices. In addition, we succeeded in representing the density of the first hitting time of the radial part of a Brownian motion with constant drift, which is one of the generalizations of Bessel processes, in the case when the starting point is the origin.

On the other hand, the distribution function of the first hitting time of the radial part of a Ornstein-Uhlenbeck process, which is another generalization of Bessel processes, can be represented by confluent hypergeometric functions and their zeros with respect to the first parameter.

研究分野：確率論

キーワード：確率解析 Bessel 過程 Ornstein-Uhlenbeck 過程 Wiener sausage 到達時刻 Bessel 関数 合流型超幾何関数

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

確率論においては、以前から、ランダム係数の作用素のスペクトル理論が活発に研究されてきた。特に、Poison ポテンシャルをもつランダム Schrodinger 作用素の状態密度関数の Lifshitz tail の研究においては、球を Brown 運動の道に沿って動かしたときに得られる図形 (Wiener sausage とよばれる) の体積およびその一般化の Laplace 変換の漸近挙動が重要な役割を果たすことが指摘され、それを与えるために、大偏差原理という新たな理論がつくられた。その原型は、Kac と Luttinger が行ったランダムに穴をあけた領域での熱方程式の基本解の trace の期待値の挙動の研究にある。

しかし、実際には、Wiener sausage の体積の大偏差原理自体が解決されたのは、ずいぶん後になってからのことである。しかし、現在においてもエントロピー関数は与えられていない。また、Brown 運動以外の確率過程に関しては、安定過程に関して小偏差原理が与えられているだけで、その後の発展は見られなかった。

そこで、定数 drift をもつ Brown 運動に対する Wiener sausage の体積の期待値を表示し、drift をうまく選ぶことによって、エントロピー関数の候補となるものを与える試みを続けてきた。現在では、この Wiener sausage の体積の期待値の具体的な形が与えられ、さらに、時刻が大きくなるときの挙動が得られている。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、確率過程が定める筒型集合、いわゆる Wiener sausage の体積に関する大偏差原理を確立することであり、具体的には次の2点である。

- (1) Brown 運動に対する Wiener sausage の体積のエントロピー関数を決定する。
- (2) Ornstein-Uhlenbeck 過程に対する Wiener sausage の体積の期待値を求める。

### 3. 研究の方法

- (1) ドリフトをもつ Brown 運動に対する Wiener sausage の体積の期待値の表示については、すでに特殊関数を含む項の交代級数で与えられることがわかっていて、さらにそれが絶対収束しているので解析が比較的容易である。変形 Bessel 関数の指数が大きいときの評価を与えることで単調性および連続性を示すことができるものと思われる。
- (2) ピン留め Brown 運動に対する Wiener sausage の体積に対するエントロピー関数は、ピン留めしない場合のものと同じになることが、先行する結果から推測できるので、Cameron-Martin の公式等確率解析で用いられる手法を使って示す予定である。
- (3) Brown 運動の球面への到達時刻の分布関数の Laplace 変換がわかるとそれから Brown 運動に対する Wiener sausage の体積の期待値の Laplace 変換が求まるが、その際には、Brown 運動の平行移動不変性が本質的に必要となる。しかし、多次元 Ornstein-Uhlenbeck 過程は平行移動不変性をもたないので、同様に議論することができない。そこで、第一段階として、Ornstein-Uhlenbeck 過程の球面への到達時刻の分布関数を考える。Laplace 変換は合流型超幾何関数の比で与えられているので、それを逆変換できる形への変形を試みる。Bessel 過程のときに用いた手法は、連携研究者の松本裕行教授と共同で開発し、変形 Bessel 関数の比については確立しているが、合流型超幾何関数の場合は、Laplace 変換における変数が第一パラメータのところに含まれるので、まったく同じ手法を用いることができない。合流型超幾何関数のパラメータを変数として考えた関数の性質を詳しく調べることで、問題解決を試みる。
- (4) Ornstein-Uhlenbeck 過程の球面への到達時刻の分布関数は対応した拡散方程式を解くことによって得られるが、Laguerre 微分方程式が関係することがわかっている。この方程式の解である Laguerre 関数を用いて分布関数を表示する方法も考える。

### 4. 研究成果

- (1) Brown 運動の径方向の運動については、その一般化の1つとして、Bessel 過程があげられる。先行する研究より、Bessel 過程の到達時刻の分布関数は変形 Bessel 関数とその零点で表示できることがわかっている。出発点が到達点と比べて原点より遠くにある場合について、その表示を用いて到達時刻の末尾確率の漸近挙動も得られている。さらに、第2項目の減衰オーダーまですでに与えられているが、その係数の決定については、積分表示がなされているものの、具体的な決定に関しては未解決のままであった。今回、すでに与えられている分布関数の表示を用いて、第2項目の係数を具体的に表示することができた。
- (2) 一般に確率過程の到達時刻の密度関数を表示するには、そのラプラス変換を求め、それを逆変換することが多い。定数ドリフトをもつ Brown 運動の球面への到達時刻についても、その Laplace 変換を求めることができ、変形 Bessel 関数と Gegenbauer 多項式を用いて記述されることがわかっている。それを逆変換することで到達時刻の密度関数を与えることができるが、出発点が原点でない場合に限られていた。今回、未解決であった原点から出発する場合に、原点から出発するドリフトをもたない Brown 運動の到達時刻の密度関数と第1種変形 Bessel 関数で表示することができた。ここでは、Brown 運動の球面への到達時刻とその到達場所との同時分布が到達時刻の分布と球面上の一樣測度との直積でかけることが解決のポイントとなっている。また、この結果は、原点以外の点から出発する場合の密度

関数の出発点を形式的に 0 に近づけたものと一致している。

- (3) Brown 運動の半径方向の運動については, Bessel 過程への一般化の他に, Brown 運動に定数ドリフトを付けたものの半径方向の運動があり, その密度関数の表示については全面的に解決することができた。もう一つの一般化として Orsntein-Uhlenbek 過程の半径方向の運動があげられ, radial Orsntein-Uhlenbek 過程とよばれている。Orsntein-Uhlenbek 過程は Brown が観測した Brown 運動の数学モデルとして知られ, 拡散過程の研究者の関心も高い。Radial Orsntein-Uhlenbek 過程の到達時刻の分布関数の Laplace 変換は, 合流型超幾何関数での比で与えられていて, 今回, それを逆変換することで到達時刻の分布関数を表示することができた。出発点が到達点と比べて原点より遠い場合に関心があるが, 分布関数は, 第 2 種合流型超幾何関数とその第 1 パラメータに関する零点を用いて表示できることがわかった。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Hamana Yuji and Matsumoto Hiroyuki	4. 巻 41
2. 論文標題 Precise Asymptotic Formulae for the First Hitting Times of Bessel Processes	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Tokyo Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 603 ~ 615
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3836/tjm/1502179246	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hamana Yuji, Matsumoto Hiroyuki, Shirai Tomoyuki	4. 巻 39
2. 論文標題 On the zeros of the Macdonald functions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Opuscula Mathematica	6. 最初と最後の頁 361 ~ 382
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7494/OpMath.2019.39.3.361	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hamana Yuji	4. 巻 95
2. 論文標題 Hitting times to spheres of Brownian motions with drifts starting from the origin	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 37 ~ 39
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3792/pjaa.95.37	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hamana Yuji	4. 巻 251
2. 論文標題 The probability distributions of the first hitting times of radial Ornstein-Uhlenbeck processes	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Studia Mathematica	6. 最初と最後の頁 65 ~ 88
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4064/sm180410-27-12	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件（うち招待講演 2件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 濱名裕治
2. 発表標題 Wiener sausage を巡って
3. 学会等名 山形大学理学部講演会（招待講演）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 濱名裕治
2. 発表標題 Precise asymptotic formulae for the first hitting times of Bessel processes
3. 学会等名 研究集会「マルコフ過程とその周辺」
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 濱名裕治
2. 発表標題 Precise asymptotic formulae for the first hitting times of Bessel processes
3. 学会等名 新潟確率論ワークショップ
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 濱名裕治
2. 発表標題 Ornstein-Uhlenbeck 過程の到達時刻について
3. 学会等名 研究集会「確率解析の諸相」（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yuji Hamana
2. 発表標題 On the first hitting times of Ornstein-Uhlenbeck processes
3. 学会等名 Workshop on "Random matrices, determinantal processes and their related topics" in Beppu 2018
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 濱名裕治
2. 発表標題 Ornstein-Uhlenbeck 過程の到達時刻について
3. 学会等名 新潟確率論ワークショップ
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 濱名裕治
2. 発表標題 Radial Ornstein-Uhlenbeck 過程の到達時刻について
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 濱名裕治
2. 発表標題 Large time asymptotics for transition densities of radial symmetric stable processes
3. 学会等名 新潟確率論ワークショップ
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 濱名裕治
2. 発表標題 定数ドリフトをもつブラウン運動の到達時刻について
3. 学会等名 日本数学会九州支部例会
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	松本 裕行  (Matsumoto Hiroyuki)		