

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和元年6月25日現在

機関番号：32641

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05212

研究課題名(和文) リプシッツ発展作用素論の基礎と応用

研究課題名(英文) Basic theory of Lipschitz evolution operators and applications

研究代表者

小林 良和 (KOBAYASHI, Yoshikazu)

中央大学・理工学部・共同研究員

研究者番号：80092691

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,200,000円

研究成果の概要(和文)：距離空間において消散条件を満たす変異方程式の初期値問題の適切性を示し、バナッハ空間における準線形発展方程式の初期値問題の適切性に関する典型的な結果をその得られた理論から導いた。抽象準線形発展方程式に対する初期値問題について、準線形作用素の定義域が一定ではなくかつ稠密でもない場合を考察し、既存の結果を拡張し、その適切性を示した。応用として、サイズ構造人口モデルの連続的微分可能な解の一意存在を絶対可積分関数の空間で証明した。乗法的確率外力を持った非線形保存型偏微分方程式に対する初期値・非斉次ディリクレ問題境界値問題を扱い、動力学的な形式化により、その適切性を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

従来のバナッハ空間における消散条件を満たす常微分方程式の初期値問題の適切性に関する理論からは導くことのできなかった、バナッハ空間における準線形発展方程式の初期値問題の適切性に関する典型的な結果が、距離空間における変異方程式の初期値問題の適切性に関する理論から導いたことの意義は大きい。距離空間における変異方程式に関する理論を整備・拡張することにより、より広範な非線形発展方程式に適用可能な理論が得られる可能性が高まった。また、微分概念の反省を含む、非線形解析一般に係る基礎概念と手法についての新たな可能性をも孕む研究成果である。

研究成果の概要(英文)：A main result establishes the existence and uniqueness, under a type of dissipativity condition, of the solution of an initial value problem involving a mutational equation (a substitute for differential equations) in a complete metric space. The existence and uniqueness results of the solution to an abstract quasi-linear evolution equation in a Banach space are obtained by applying the result. Another result establishes the global well-posedness of the abstract Cauchy problem for a quasi-linear evolution equation in a real Banach space, where the domains of the quasi-linear operators are not necessarily dense or constant. An application of the result to a size-structured population model is given. The other result establishes the well-posedness, in a kinetic formulation, of the initial-(nonhomogeneous) Dirichlet boundary value problem for a scalar non-linear conservation law with a multiplicative stochastic forcing.

研究分野：数理科学, 数学, 基礎解析学, 非線形発展方程式論と応用

キーワード：非線形半群 リプシッツ作用素半群 準線形発展方程式 変異方程式 保存型偏微分方程式 乗法的確率外力 サイズ構造人口モデル 衝撃波許容条件

1. 研究開始当初の背景

縮小作用素の半群の理論は1967年に高村幸男により創始され、その後、その生成などについて一般のバナッハ空間における基礎理論が完成し、単独保存則の方程式、多孔性媒質方程式、Hamilton-Jacobi 方程式などの初期値問題の適切性などを示すために応用されている。この縮小作用素の半群理論では扱えないが、準線形双曲型方程式系に対する初期値問題などに応用可能なリプシッツ作用素半群の理論が研究代表者達に発見された(引用文献 [5])。その後、研究代表者達は生成作用素が連続とは限らない場合のリプシッツ作用素半群の生成定理を引用文献 [6] や [7] などで発表し、Carrier 方程式や 2 次元 Navier-Stokes 方程式などに対する発展問題の解の一意存在や適切性の解明に応用できることを明らかにした。このような研究成果を踏まえ、研究代表者達は、生成作用素が連続な場合のリプシッツ発展作用素の一般的な生成定理などを得て、引用文献 [8] などで発表した。一方、最近になって、距離空間における常微分方程式に対する初期値問題の解の一意存在に関して変異方程式 (mutation equations) や勾配流 (gradient flows) の理論の研究が盛んになってきた(引用文献 [1], [2], [9])。これらとリプシッツ発展作用素論とは、理論的にも、また、応用上の観点からも密接な関係があると考えられ、線形構造を前提としない一般の距離空間において、リプシッツ作用素半群やリプシッツ発展作用素の理論の建設の可能性があることがわかってきた。

2. 研究の目的

本研究では、以上のような背景から、できる限り一般的なリプシッツ発展作用素に関する基礎理論を得ることを目的として、その応用を含め種々の立場から調べた。また、リプシッツ連続な作用素半群やリプシッツ連続な発展作用素の理論を、線形構造をもつバナッハ空間の枠を超えて、バナッハ空間における常微分方程式に対応する距離空間における非線形発展方程式の理論として捉え直して、統一的な視点や統一的な理論構築の可能性を見出すことを目的とした。特に、得られた基礎理論が、準線形双曲型方程式系や準線形放物型方程式系に対する初期値問題の適切性の解明に応用できるかどうかを明らかにすることも目的とした。従来、非線形度の高い発展問題は、個々の問題ごとに調べられており、本研究のような一般論見地からの研究は少ない。さらに、距離空間上の常微分方程式の理論との関連性を明らかにすることにより、非線形解析一般に係る基礎概念と手法についての新たな視点を得るよう努めた。

3. 研究の方法

本研究は、バナッハ空間や距離空間におけるリプシッツ発展作用素の研究成果の基礎を深め、また、さらに展開・発展させ、より広汎な応用を有する理論を創出するために、研究分担者も含め、それぞれの専門を生かしながら、緊密に研究打ち合わせを行った。それぞれの従来の研究成果を生かすために、研究テーマ (1) 基礎理論の整備・建設と応用、全体の総括 (2) 準半線形理論の建設・整備、準線形放物系などの初期値問題の適切性の解明への応用 (3) 準線形双曲系や非線形保存型方程式の適切性の解明への応用 (4) 変動指数空間の応用、に分け、それぞれを主に (1) 小林良和 (2) 松本敏隆 (3) 小林和夫、應和宏樹 (4) 野井貴弘が分担した。

本研究の関係する研究分野は、実解析学、関数解析学、関数方程式論など多方面にわたる。これらの分野の最新の研究成果の交換のために、いままで毎年度に開催してきた発展方程式研究会が日本女子大学で 2016 年度、2017 年度、2018 年度も開催された。2016 年度は研究代表者も運営委員を務め、それぞれ発展問題に関連した多彩な話題について、研究分担者の講演を含め 30 講演ほどの講演があった。これら以外に、京都大学数理解析研究所の短期共同研究集会 (RIMS 共同研究、公開型) のうち本研究の研究課題に関係した集会に参加し、資料収集や研究打ち合わせを行い、また、実関数論・関数解析学合同シンポジウム、浜松偏微分方程式研究集会、The Eighth International Conference on Differential and Functional Differential Equations, The Role of Metrics in the Theory of Partial Differential Equations, 実解析学シンポジウム、The 6th Asian Conference on Nonlinear Analysis

and Optimization などの国内外の研究集会に参加し、資料収集や研究打ち合わせ、あるいは、研究成果の発表を行った。また、研究分担者の間の研究打ち合わせのためにも研究打ち合わせ旅費を使用した。

実解析、関数解析などの関係図書として、「Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces」など洋書 13 冊、「非線形偏微分方程式の大域解」など和書 19 冊を購入した。

4. 研究成果

- (1) 研究代表者は、距離空間において消散条件を満たす変異方程式の初期値問題の適切性を示した。バナッハ空間における常微分方程式の初期値問題の適切性に関する文献 [10] や [4] の結果の距離空間の場合への一般化を与える。応用例として、加藤敏夫などによるバナッハ空間における準線形方程式の初期値問題の適切性に関する典型的な結果 [3] を得られた理論から導いた。詳細は雑誌論文 [2] で発表した。距離空間におけるリブシッツ作用素半群に関する Lax-Richtmyer の近似定理や Bénilan の一意性定理などについて、「第 57 回実函数論・函数解析学 合同シンポジウム」などの招待講演で紹介し、論文 [1] で発表した。
- (2) 研究分担者の松本敏隆は、抽象準線形発展方程式に対する初期値問題について、準線形作用素の定義域が一定ではなくかつ稠密でもない場合を、雑誌論文 [5] において考察し、既存の結果を拡張し、連続微分可能な解の一意存在を示した。この結果の応用として、サイズ構造人口モデルの連続的微分可能な解の一意存在を絶対可積分関数の空間で証明した。
- (3) 小林和夫は、乗法的確率項を持つ非線形退化放物型偏微分方程式の kinetic 解の存在定理を証明し、雑誌論文 [6] で発表した。証明方法は通常に用いられている粘性消滅法ではなく、時間分割法を用いた。論文 [7] では、非斉次境界条件を持つ非線形保存型方程式の初期値問題に対する一意性問題を扱った。kinetic 形式を用いて、境界条件を持つ kinetic 解の概念を導入し、その解の一意性について論じた。論文 [3] では、乗法的確率外力を持った非線形保存型偏微分方程式に対する初期値・境界値問題を扱った。境界は非斉次ディリクレ問題を考えている。‘renormalized kinetic solution’ を導入し、その解についての存在と一意性を証明した。
- (4) 應和宏樹は相転移を記述する不連続な流束をもつ保存則方程式の初期値問題について研究を行った。解の L^1 縮小性を得るための衝撃波許容条件を新たに提案し、その条件を満足する衝撃波を基本構造とする近似解を用いることで、 L^1 縮小性をもつ解の存在を示した (学会発表 [9])。また、ある不連続な流束をもつ保存則方程式の初期値問題について研究し、初期値に関して L^1 -縮小性をもつ解を得るために必要となる衝撃波許容条件を導入した (学会発表 [6], [4])。さらに、滑らかな流束をもつ単独保存則方程式の初期値問題の波面追跡法から構成される近似解は初期値と流束に関して L^1 の意味で連続的に依存していることを示した (学会発表 [3])。滑らかな流束をもつ単独保存則方程式の初期値問題のエントロピー解が初期値と流束に関して L^1 の意味で連続的に依存していることを示した (学会発表 [1])。
- (5) 野井貴弘は、雑誌論文 [10] で、第三種の generalized Orlicz-Morrey 空間に対して、原子分解に関する定理を示し、前双対空間を特徴付けた。論文 [12] では、Herz 空間の特別な場合である Beurling algebra と呼ばれる関数空間とその双対空間の変動指数版を定義し、原子分解とその双対空間が、指数が全て定数である古典的な場合と同様の条件下で得られることを示した。論文 [13] では、Besov 空間と Triebel-Lizorkin 空間のノルムにおいて、Lebesgue ノルムの部分を generalized Morrey 空間のノルムに置き換えることにより得られる generalized-Besov 空間と generalized-Triebel-Lizorkin-Morrey 空間を導入し、最大作用素や multiplier 作用素の有界性を示した。[8] では、重み付きの変動指数 Herz 空間に対して、分数べき積分作用素の有界性が古典的な場合と同様の条件下で成り立つことを示した。[9] では、変動指数を用いて一般化された Muckenhoupt のウェイトのクラスについて解説し、このウェイトをもつ重み付き変動指数 Herz 空間におけるある intrinsic square function の有界性を各指数に適当な条件を仮定したもとの証明した。[4] では、Bloch の定理の自己完結した初等的な証明を与えた。

- (6) 研究協力者の富澤佑季は二次元実数空間に $\pi/2$ 回転不変なノルムを入れたバナッハ空間の丸さを表す幾何学的定数について論じた。また、二変数汎関である Bregman 距離に関して変数を不動点とした非拡大写像のクラスを新しく導入し、この不動点への縮小射影法による強収束定理を示した。さらに、ノルム空間のジェームズ定数、フォン・ノイマン・ジョルダン定数、ズバガヌ定数について、いくつかの新たな知見を得て、学術論文などにおいて発表した。Busemann 空間 (ある凸性を持つ測地的距離空間) における三角形の性質について考察し、学会発表した。

<引用文献>

- [1] L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savare, Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures. Lectures in Mathematics ETH Zurich, 2nd ed., Birkhauser Verlag, Basel, 2008.
- [2] J. P. Aubin, Mutational equations in metric spaces, *Set-Valued Analysis*, **1** (1993), 3–46.
- [3] T. R. Hughes, T. Kato and J. E. Marsden, Well-posed quasi-linear second-order hyperbolic systems with applications to nonlinear elastodynamics and general relativity, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **63** (1976), 273–294 (1977).
- [4] Y. Kobayashi and N. Tanaka, Semigroups of Lipschitz operators. *Adv. Differential Equations*, **6** (2001), 613–640.
- [5] Y. Kobayashi and N. Tanaka, A Lipschitz semigroup approach to two-dimensional Navier-Stokes equations, *Nonlinear Anal.*, **72**(2010), 1820–1828.
- [6] Y. Kobayashi and N. Tanaka, An application of semigroups of locally Lipschitz operators to Carrier equations with acoustic boundary conditions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **338**(2008), 852–872.
- [7] Y. Kobayashi and N. Tanaka, A Lipschitz semigroup approach to two-dimensional Navier-Stokes equations, *Nonlinear Analysis*, **72**(2010), 1820–1828.
- [8] Y. Kobayashi, N. Tanaka and Y. Tomizawa, Nonautonomous differential equations and Lipschitz evolution operators in Banach spaces, *Hiroshima Mathematical Journal*, **45** (2015), 267–307.
- [9] T. Lorenz, *Mutational Analysis, A Joint Framework for Cauchy Problems in and beyond Vector Spaces*, Lecture Notes in Mathematics, **1996**, Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [10] R. H. Martin Jr., Differential equations on closed subsets of a Banach space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **179** (1973), 399–414.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 (計 13 件)

- [1] 小林良和, 距離空間におけるリブシッツ作用素半群, 第 57 回実函数論・函数解析学合同シンポジウム講演集, 2018, 33-52, 査読なし.
- [2] Y. Kobayashi and N. Tanaka, Well-posedness for mutational equations under a general type of dissipativity conditions, *Israel Journal of Mathematics*, **225**(2018), 1–33, 査読あり.
- [3] K. Kobayashi and D. Noboriguchi, Well-posedness for stochastic scalar conservation laws with the initial-boundary condition, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **481**(2018), 1416–1458, 査読あり.
- [4] M. Izuki, T. Koyama, T. Noi and T. Takeuchi, A simple estimate of the Bloch constant, *Communications in Mathematical Analysis*, **21**(2018), 35–41, 査読あり.
DOI: 0.1016/j.jmaa.2018.01.054.

- [5] T. Matsumoto and N. Tanaka, Abstract Cauchy problems for quasilinear operators whose domains are not necessarily dense or constant, *Nonlinear Analysis*, **162**(2017), 91–112, 査読あり.
- [6] K. Kobayasi and D. Noboriguchi, A time-splitting approach to quasilinear degenerate parabolic partial differential equations, *Differential and Integral Equations*, **29**(2016), 1139–1166, 査読あり.
- [7] K. Kobayasi and D. Noboriguchi, A stochastic conservation laws with nonhomogeneous Dirichlet boundary conditions, *Act Mathematica Vietnamica*, **41**(2016), 607–632, 査読あり.
- [8] M. Izuki and T. Noi, Boundedness of fractional integrals on weighted Herz spaces with variable, *Journal of Inequalities and Applications*, 2016, 査読あり.
DOI 10.1186/s13660-016-1142-9.
- [9] M. Izuki and T. Noi, An intrinsic square function on weighted Herz spaces with variable exponent, *Journal of Mathematical Inequalities*, **11**(2017) 799–816, 査読あり.
- [10] V. S. Guliyev, S.G. Hasanov, Y. Sawano and T. Noi, Non-smooth atomic decompositions for generalized Orlicz-Morrey spaces of the third kind, *Acta Appl. Math.*, **145** (2016), 133–174, 査読あり.
- [11] T. Noi, Trace operator for 2-microlocal Besov spaces with variable exponents, *Tokyo J. Math.*, **39** (2016), 293–327, 査読あり.
- [12] M. Izuki and T. Noi, Hardy spaces associated to critical Herz spaces with variable exponent, *Mediterr. J. Math.*, **13** (2016), 2981–3013, 査読あり.
- [13] S. Nakamura, T. Noi and Y. Sawano, Generalized Morrey spaces and trace operator, *Sci. China Math.*, **59** (2016), 281–336, 査読あり.

[学会発表] (計 15 件)

- [1] 佐々木善雅, 應和宏樹, 単独保存則方程式の解の初期値と流束に関する連続依存性について, 日本数学会 2019 年度年会, 2019 年 3 月, 東京工業大学.
- [2] 佐々木善雅, 應和宏樹, 単独保存則方程式の解の初期値と流束に関する連続依存性について, 日本数学会年会, 2019 年 3 月, 東京工業大学.
- [3] 皆川夏樹, 鈴木宏弥, 佐々木善雅, 應和宏樹, 波面追跡法から構成される近似解の初期値と流束に関する安定性について, 第 44 回発展方程式研究会, 2018 年 12 月, 日本女子大学.
- [4] 佐々木善雅, 應和宏樹, L^1 contractive solutions for scalar conservation laws with discontinuous flux functions, 第 44 回発展方程式研究会, 2018 年 12 月, 日本女子大学.
- [5] Y. Kobayashi and N. Tanaka, Remarks on semigroups of Lipschitz operators in a metric space, The 6th Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (招待講演) (国際学会), 2018 年 11 月, 沖縄科学技術大学院大学.
- [6] 佐々木善雅, 應和宏樹, 不連続な流束をもつ保存則方程式の一意可解性について, 日本数学会秋季総合分科会, 2018 年 9 月, 岡山大学.
- [7] 小林良和, 距離空間におけるリプシッツ作用素半群, 第 57 回実函数論・函数解析学合同シンポジウム (招待講演), 2018 年 9 月, 拓殖大学文京キャンパス.
- [8] Y. Kobayashi and N. Tanaka, Lipschitz semigroups and mutation equations in metric spaces, The Role of Metrics in the Theory of Partial Differential Equations (国際学会), 2018 年 7 月, 北海道大学.
- [9] 佐々木善雅, 應和宏樹, 相転移を記述する保存則方程式の一意可解性について, 第 43 回発展方程式研究会, 2017 年 12 月, 日本女子大学.
- [10] Y. Kobayashi and N. Tanaka, Dissipative Evolution Problems in Metric Spaces, The Eighth

International Conference on Differential and Functional Differential Equations (国際学会),
2017年8月, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow.

- [11] 登口大, 小林和夫, 確率保存則方程式に対する非斉次 Dirichlet 問題の適切性, 日本数学会年会, 2017年3月, 首都大学東京.
- [12] 佐々木善雅, 應和宏樹, ある不連続な流束をもつ保存則方程式の一意可解性について, 第42回発展方程式研究会, 2016年12月, 日本女子大学.
- [13] 登口大, 小林和夫, 確率保存則方程式に対する初期値・境界値問題の適切性, 第42回発展方程式研究会, 2016年12月, 日本女子大学.
- [14] Y. Kobayashi and N. Tanaka, Evolution problems in metric spaces and dissipativity conditions, The fifth Asian conference on Nonlinear Analysis and Optimization, 2016年08月, 朱鷺メッセ, 新潟.
- [15] 松本敏隆, サイズ構造モデルへの抽象準線形理論的アプローチ, 第200回広島数理解析セミナー, 2016年05月, 広島大学.

6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名: 松本 敏隆
ローマ字氏名: MATSUMOTO, Toshitaka
所属研究機関名: 静岡大学
部局名: 理学部
職名: 教授
研究者番号 (8桁): 202295612
研究分担者氏名: 小林 和夫
ローマ字氏名: KOBAYASI, Kazuo
所属研究機関名: 早稲田大学
部局名: 教育・総合科学学術院
職名: 教授
研究者番号 (8桁): 80103612
研究分担者氏名: 應和 宏樹
ローマ字氏名: OHWA, Hiroki
所属研究機関名: 新潟大学
部局名: 自然科学系
職名: 准教授
研究者番号 (8桁): 10549158
研究分担者氏名: 野井 貴弘
ローマ字氏名: NOI, Takahiro
所属研究機関名: 首都大学東京
部局名: 理学研究科
職名: 客員研究員
研究者番号 (8桁): 90736555

(2) 研究協力者

研究協力者氏名: 冨澤 佑季乃
ローマ字氏名: TOMIZAWA, Yukino

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。