

令和 2 年 6 月 25 日現在

機関番号：34315

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05215

研究課題名(和文) Parametrixによる確率無限次元解析

研究課題名(英文) Infinite dimensional analysis using the parametrix method

研究代表者

Kohatsu・Higa A (Kohatsu Higa, Arturo)

立命館大学・理工学部・教授

研究者番号：80420412

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円

研究成果の概要(和文)：確率parametrix方法に対してのシミュレーション方法として拡張を行った。parametrix展開方法の宣伝を行うために簡単な説明を取り入れた論文を出版した。その成果に興味を持った研究者が現れ、研究活動が広まる可能性が出てきた。特に2018年度ではシミュレーション方法としてだけでなく理論に役立つことを証明するために努力して来た。その中の一つ例として無限次元部分積分公式がある。その方向で研究を行った。また、ファイナンスへの応用だけではなく確率微分方程式のパラメータ推定に関してジャンプ型確率微分方程式におけるパラメータ推定の近似制度について研究を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

時間と共に不確実に変化する量が応用問題ではよく現れる、その中の一つが拡散過程と呼ばれる概念である。例えば株価や海の酸素濃度などがある。応用の問題の必要性により複雑な理論的なモデルが存在する。ただし、実際の計算を行うためにパソコンを利用し、シミュレーションにより計算する。現代のパソコンの計算力に限界があるので素早く計算できる方法が不可欠である。この中で偏微分方程式論で利用される解析方法の中のparametrixと呼ばれる方法を利用し、新しいシミュレーション方法を展開した。また、確率過程論の中でも理論展開のために利用することを目指した。ファイナンスやパラメータ推定問題にも応用した。

研究成果の概要(英文)：Simulation experiments using the parametrix method were carried out. In order to disseminate this method for applied sciences we found an easier way to explain this methodology and improved the simulation methodology. With this achievements, we believe that the method may be used by other researchers. We also found out how to use this methodology not only for practical Monte Carlo simulations but also for theoretical purposes. One of them is the infinite dimensional integration by parts formula.

Besides financial applications, we also worked out asymptotic properties for parameter estimation problems for jump type stochastic differential equations.

研究分野：確率解析

キーワード：parametrix 無限次元解析 シミュレーション

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

このプロジェクトの開始当初には Parametrix 方法という偏微分方程式の中でも古典的な解析方法として用いていた。確率解析の中で解析論と確率論の知識を持っていた研究者の中で知られていた方法であった。ただし、主にマルコフ過程の理論的な展開のために利用されていた。そのため、この方法の解析的な専門用語を利用した論文が多かった。

2. 研究の目的

Parametrix 方法を確率解析の言葉に置き換えて、様々な応用に利用できるようにする。特に本研究では、新しい無限次元解析に向けて確率 Parametrix 方法により滑らかでない係数の確率微分方程式(SDE)の解析道具として広く適用することが目的である。特に次の問題について取り組むことを目的とする (1) 滑らかではない準楕円 SDE の密度関数に関して詳しく性質を調べる。(2) 滑らかでない汎関数に対しての密度関数の parametrix 展開。汎関数として確率過程の最大値や停止時間を主な例として扱う。(3) SDE の係数が滑らかでないときの密度関数展開を行う。(4) 準楕円 SDE の高近似方法により SDE の近似と解析方法。(5) 応用を考えると様々な driving 確率過程や汎関数に関して適用し、Parametrix 方法の確率的な議論により応用範囲を拡大する。例えば Driving 確率過程ではジャンプ過程や Fractional ブラウン運動などが考えられる。

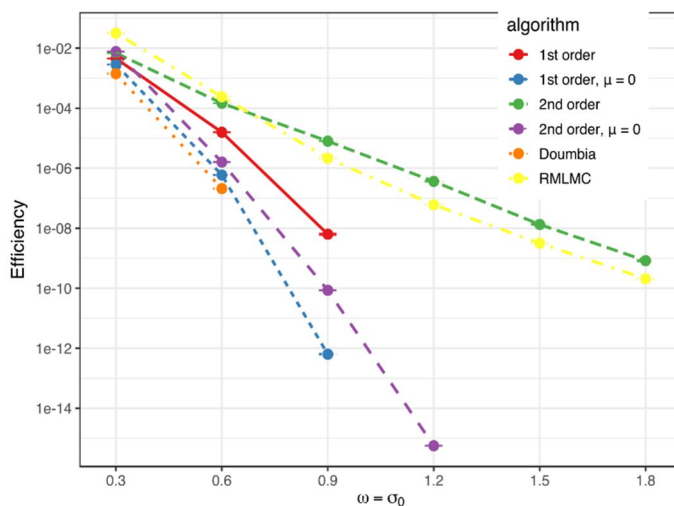
3. 研究の方法

最初に Parametrix 方法を利用し確率微分方程式の解の分布をモンテカルロシミュレーションを行うために使えることを証明し、ファイナンスや統計学への応用についても検討した。できるだけ確率的な用語を利用し、利用者を増やすことを目指した。例えばジャンプ型確率微分方程式や汎関数に関して確率的な解析方法を利用し、使えるようにした。また、理論の観点からも展開を行うことが目的であったため、停止時間というような拡散過程の汎関数に関して確率的な解析を行った。このことにより軌道の影響について研究を行った。特に無限次元解析の部分積分公式に関して研究を行った。

4. 研究成果

この4年間では我々の研究の中でシミュレーションの応用に限らず理論的な面でも確率解析の中で parametrix 方法の展開を行った。その成果として現在世界中ではこの方法を確率的に行うか解析的に行うかの可能性が広がってきた。

一般的に確率微分方程式は様々な現象が説明できるモデルであることが認められている。その中で具体的に計算できる確率微分方程式が少ない。そこで、その解の分布、平均などの統計を計算するときに役に立つ公式を構築した。その論文により誤差がないモンテカルロシミュレーション方法の提案ができた。連続拡散過程の基本なシミュレーションを行い、そのシミュレーションの分散を減少する方法も提案できた。



このグラフではいくつか提案したシミュレーション方法の精度を計っている。緑の線が分散現象法を利用している方法である。黄色線は MultiLevel と呼ばれる方法を利用したシミュレーション方法である。ただし、なめらかでない汎関数のシミュレーション方法として今回提案された parametrix 方法による展開を行っている。黄色線の同様な展開が現在困難である(細かい場合分けを行う必要があり、各場合で異なる解析を行う必要がある)。この論文の後に様々な応用で使えるように以下の場合でもシミュレーション方法を構築できるように準備した。

1 ジャンプ型確率微分方程式 2 1次元反射付き確率微分方程式 3 停止された拡散過程。さらに統計推定を行う場合でもこのような方法が使えることも証明できた、特にジャンプ型確率微分方程式の設定でパラメータ推定を行うときの LAN 性質の証明にも取り組んだ。この性質がわかることで尤度関数を利用した推定や検定が最適であることがわかるので応用の意味で大事な性質である。ただし、利用された技術のせいでジャンプ構想が制限されることが必要であった。この制限を外すために parametrix 技術の展開を利用することを考え始めている。このプロジェクトの最後に parametrix という展開方法に関して研究と宣伝を行った。特に国際研究会に参加し簡単な説明を行って来た。その成果によって興味を持った研究者が現れた、研究活動が広まる可能性が出て来た。

次に無限次元の部分積分公式の構築に関して検討し始めた。今までに Malliavin 解析と呼ばれてきた方法を使うことが通用である、ただし、微分概念が一次元解析と似ていることもあるので確率過程がなめらかではないと微分不可能になる。その結果微分積分公式の構築できないこ

とが良くある。

特別な例に関して測度変換方法を利用し、Bismut 氏や Cattiaux 氏が結果を得られている。

この設定では我々ができるだけ一般理論を構築することを目指している。このためマルコフ連鎖を利用し、parametrix を確率論のなかにある無限次元部分積分公式を紹介しようとしている。このため今年には停止された確率過程に関して部分積分公式を得た。この公式は今までにできた公式よりわかりやすくシミュレーションも可能である。

この設定では停止された拡散過程に関して無限次元部分積分公式を構築することができた。この問題は Frikha 氏と Li 氏の共同研究が出版され、深く関係がある問題なので研究を進めている。

ジャンプ確率過程に関して大学院レベルの教科書を出版し、その内容を踏まえて特徴のある安定過程の最大に関する部分積分公式を得られる方法について考えた。基本結果が得られたがどこまで拡大できるのか検討している。

残した課題として Sabr 確率過程が数理ファイナンスで現れるモデルがある。頻繁に使われているモデルでありながら数学の性質に関して完全証明されていないことが多く、その中で密度関数の存在について証明することを目指してきた。ある場合で証明ができているが一般の場合でも証明できるように努力している。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 10件 / うち国際共著 7件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 A. Kohatsu-Higa, N. Vayatis and K. Yasuda	4. 巻 39
2. 論文標題 Tuning of a Bayesian estimator under discrete time observations and unknown transition density	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Theory of Stochastic Processes	6. 最初と最後の頁 18-52
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Arturo Kohatsu-Higa and Go Yuki	4. 巻 22
2. 論文標題 STOCHASTIC FORMULATIONS OF THE PARAMETRIX METHOD	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 ESAIM: Probability and Statistics	6. 最初と最後の頁 178-209
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1051/ps/2018013	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Jiro Akahori, Xiaoming Song, Tai-Ho Wang	4. 巻 129
2. 論文標題 Bridge representation and modal-path approximation	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Stochastic Processes and their Applications	6. 最初と最後の頁 174-204
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1016/j.spa.2018.02.013	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Jiro Akahori, Yuuki Ida, Greg Markowsky	4. 巻 151
2. 論文標題 p-conformal maps on the triangular lattice	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Statistics and Probability Letters	6. 最初と最後の頁 42-48
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1016/j.spl.2019.03.010	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kohatsu-Higa Arturo, Nualart Eulalia, Tran Ngoc Khue	4. 巻 51
2. 論文標題 LAN property for an ergodic diffusion with jumps	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Statistics	6. 最初と最後の頁 419 ~ 454
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1080/02331888.2016.1239727	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Andersson, Patrik; Kohatsu-Higa, Arturo	4. 巻 23
2. 論文標題 Unbiased simulation of stochastic differential equations using parametrix expansions	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Bernoulli	6. 最初と最後の頁 2028 ~ 2057
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) doi:10.3150/16-BEJ803	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Arturo Kohatsu-Higa, Libo Li	4. 巻 34
2. 論文標題 Regularity of the density of a stable-like driven sde with Holder continuous coefficients	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Stochastic Analysis and Its Applications	6. 最初と最後の頁 979-1024
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/07362994.2016.1198706	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Arturo Kohatsu-Higa, Dai Taguchi, Jie Zhong	4. 巻 45
2. 論文標題 Parametrix methods for skew diffusions.	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Potential Analysis	6. 最初と最後の頁 299-329
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11118-016-9547-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Arturo Kohatsu-Higa and David Nualart	4. 巻 N-A
2. 論文標題 Large time asymptotic properties of the stochastic heat equation	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Theoretical Probability	6. 最初と最後の頁 N-A
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10959-020-01007-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Patrik Andersson, Arturo Kohatsu-Higa and Tomooki Yuasa	4. 巻 N-A
2. 論文標題 Second order probabilistic parametrix method for unbiased simulation of stochastic differential equations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Stochastic Processes and their Applications	6. 最初と最後の頁 N-A
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.spa.2020.03.016	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Noufel Frikha, Arturo Kohatsu-Higa, and Libo Li	4. 巻 24
2. 論文標題 Integration by parts formula for killed processes: a point of view of approximation theory	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Electronic Journal of Probability	6. 最初と最後の頁 44
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1214/19-EJP352	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計14件 (うち招待講演 13件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 Arturo Kohatsu-Higa
2. 発表標題 Integration by parts formula for stopped processes: An unbiased formula
3. 学会等名 Workshop on Stochastic Analysis and Applications (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Arturo Kohatsu-Higa
2. 発表標題 Sensitivity analysis: some irregular examples
3. 学会等名 Seminar Data Lab (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Jiro Akahori
2. 発表標題 Randomization of Option Price
3. 学会等名 Probability, Uncertainty and Quantitative Risk (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Arturo Kohatsu-Higa
2. 発表標題 Integration by parts formula for stopped processes: An unbiased formula
3. 学会等名 Workshop on Stochastic Analysis and Applications (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Arturo Kohatsu-Higa
2. 発表標題 Sensitivity analysis: some irregular examples
3. 学会等名 Seminar: DataLab (招待講演)
4. 発表年 2019年

1 . 発表者名 Arturo Kohatsu-Higa
2 . 発表標題 An IBP formula for a stopped process
3 . 学会等名 Third Conference on Ambient Fields and Related Topics (招待講演)
4 . 発表年 2018年

1 . 発表者名 Arturo Kohatsu-Higa
2 . 発表標題 IBP for Stopped Processes
3 . 学会等名 Workshop on Stochastic Analysis and Related Topics, Institute of Mathematical Research (IMR) and the Department of Mathematics at the University of Hong Kong, Hong Kong (招待講演)
4 . 発表年 2018年

1 . 発表者名 Arturo Kohatsu-Higa
2 . 発表標題 Parametrix based simulations of order 2
3 . 学会等名 Seminaire Bachelier de Paris (招待講演)
4 . 発表年 2018年

1 . 発表者名 Arturo Kohatsu-Higa
2 . 発表標題 Probabilistic interpretation of the parametrix method
3 . 学会等名 Stochastic Processes and their Applications (招待講演)
4 . 発表年 2018年

1. 発表者名 Jiro Akahori
2. 発表標題 Polya Urn in Finance
3. 学会等名 Quantitative Methods in Finance 2018 Conference (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kohatsu-Higa, Arturo
2. 発表標題 Unbiased Monte Carlo Methods for diffusions and its functionals. The parametrix point of view
3. 学会等名 関西大学確率論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kohatsu-Higa, Arturo
2. 発表標題 Simulation methods based on the parametrix
3. 学会等名 London Mathematical Society EPSRC Durham Symposium Stochastic Analysis (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kohatsu-Higa, Arturo
2. 発表標題 Unbiased simulation methods of order two
3. 学会等名 WORKSHOP ON "MATHEMATICAL FINANCE AND RELATED ISSUES" (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Arturo Kohatsu-Higa
2. 発表標題 Parametrix methods: Probabilistic interpretations
3. 学会等名 Stochastic processes - numerical methods and related topics (招待講演)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Arturo Kohatsu-Higa and Atsushi Takeuchi	4. 発行年 2019年
2. 出版社 Springer-Verlag	5. 総ページ数 346
3. 書名 Jump SDEs and the Study of Their Densities	

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>Research of Arturo Kohatsu-Higa http://research-db.ritsumei.ac.jp/Profiles/91/0009081/profile.html Research of Jiro Akahori http://research-db.ritsumei.ac.jp/Profiles/38/0003770/profile.html Research Activities www.ritsumei.ac.jp/~khsts00/Profile http://research-db.ritsumei.ac.jp/Profiles/91/0009081/prof_e.html Arturo Kohatsu-Higa Research Papers http://www.ritsumei.ac.jp/~khsts00/publish-j.html</p>
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	赤堀 次郎 (Akahori Jiro) (50309100)	立命館大学・理工学部・教授 (34315)	