

令和 2 年 7 月 14 日現在

機関番号：10103

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05219

研究課題名(和文)非局所相互作用をもつ非線形移流拡散方程式系に対する爆発解の研究

研究課題名(英文)On blow-up solutions for system of nonlinear drift-diffusion equations with nonlocal interactions

研究代表者

黒木場 正城 (Kurokiba, Masaki)

室蘭工業大学・大学院工学研究科・教授

研究者番号：60291837

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、速い非線形拡散を与える退化移流拡散方程式系の初期値問題について取り組んだ。重み付き L_p 空間を新しく導入し、Shannonの不等式を適用し解の爆発条件を示した。Shannonの不等式は断熱指数に依存し、従来の不等式を拡張している。次にスケール臨界関数空間にKeller-Segel方程式の初期値問題の特異極限問題に取り組んだ。緩和時間を無限大にとるとき、スケーリング臨界関数空間上で、強解が放物型-楕円型移流拡散方程式系の解に収束することを示した。特異限界問題の証明のために、熱方程式に対する一般化最大正則性の不等式を適用した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

移流拡散方程式は、半導体、プラズマ粒子の移動現象、中性子星の誕生、生物モデルなどそのサイズスケールが異なりながらも粒子の拡散と凝集の機構で様々な現象共通の数理構造が記述する。移流拡散方程式系の数理構造を明らかにしていくことは普遍的な科学的真理を求めていくことである。また腫瘍モデルの移流拡散方程式系は多成分系でその解析は膨大な情報量を必要とするが、癌の研究に医学的に貢献するものになる。半導体の設計にも移流拡散方程式の研究は大変重要である。

研究成果の概要(英文)：In this research, we deal with the initial value problem of the degenerate drift-diffusion system with the fast nonlinear diffusion. We have introduced a new weighted L_p space and applied Shannon's inequality to show the new blow-up condition of the solution. Shannon's inequality depends on the heat capacity ratio, and is an extended version of the conventional inequality. In Second subject, we deal with the singular limit problem of the initial value problem of the Keller-Segel equation in the scale critical function space. It is shown that the strong solution in the scaling critical function space converges to the solution of the parabolic-elliptic drift-diffusion system when the relaxation time is infinite. To prove the singular limit problem, the generalized maximum regularity inequality for the heat equation is applied.

研究分野：非線形偏微分方程式論

キーワード：退化型移流拡散方程式系 空間高次元 多成分移流拡散方程式系 有限時間爆発解 スケール臨界関数空間 特異極限問題 Lebesgue-Bochner 空間 熱方程式の最大正則性

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

本研究の非線形移流拡散方程式は空間2次元問題の解の構造に特徴が現れる。初期値臨界点が存在し、臨界点より大きい初期値では解が有限時間で発散する(爆発解)。また臨界点より小さい初期値では解が時間大域的に存在し続ける(時間大域解)。現在に至るまで空間2次元移流拡散方程式系を多くの研究者が研究し、その数学解析法が発展してきた。半導体設計やプラズマ粒子の移動現象の解明など方程式系の歴史は決して浅くないが、数学の研究分野では現在も新しい話題を提供し続けている。また数理生物学では粘菌の走化性生物モデルや腫瘍モデルの研究は応用の観点からも注目されている。粘菌方程式の一つであるNagaiモデルは、放物型-楕円型の偏微分方程式の系であり、上にあげた空間2次元方程式系の解の構造の証明を最初に成功された方程式系である。本研究及び研究代表者の研究対象としている移流拡散方程式系はNagaiモデルを礎としている。

研究代表者は、2013年に大阪大学鈴木貴教授と共同で2成分空間2次元移流拡散方程式系に対し、T. Shafirir-G. Wolanskyによる対数型Hardy-Littlewood不等式を適用し、有限時間爆発解が生命体成分ごとに凝集してMass分離を起こす機構を数学的に証明した。2014-2015年は東北大学小川卓克教授と共同研究で多成分空間2次元移流拡散方程式系の初期値問題の時間局所可解性とその関数空間の拡張と有限時間爆発解について研究を行った。さらに2017年に東北大学小川卓克教授と共同で情報理論で扱われるShannonエントロピーの不等式の連続版を考案し、これを空間高次元移流拡散方程式系に適用して、2004年に発表されたL. Corrias-B. Perthame-H. Zaagの爆発条件に含まれない爆発誘導初期値を示す新しい条件を導いた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、粒子の輸送現象に対して粒子の相互作用を精密なモデルを使用せず、平均場近似を用いて、シンプルな非局所相互作用系の2次元あるいは空間高次元の非線形移流拡散方程式系に対して数学解析で、現象の本質をどこまで引き出す事ができるかという試みであり、また同時に数学的テーマである偏微分方程式の解の可解性、時間大域解-爆発解の構造を明らかにすることである。空間2次元単成分移流拡散方程式系の初期値問題は多くの研究者によって研究されてきた。それは空間2次元の問題が簡単だからではなく、予想された解の構造の面白さにある。その中であって研究代表者自身、空間2次元2成分の初期値問題についてスケール臨界関数空間上の有限時間爆発解について取り組んできた。実際には成分数を一般化した空間2次元多成分移流拡散方程式系は数学解析的に手に余る問題であり、着実な研究が必要とされる。しかし一方で近年、高次元の場合には単成分の移流拡散方程式系の初期値問題において解の爆発条件を導くためにShannonの不等式が有効であることが明らかになり、一般の多成分系の問題へ繋がるであろうと期待される。さらに空間3次元の非線形移流拡散方程式系に目を向ければ未解決の課題が山積みである。本研究においては次元と成分をなるべく制限しない形で移流拡散方程式系の研究を試みる。以上の事から、本研究の非局所相互作用をもつ非線形移流拡散方程式系を研究することは非常に重要で意義のあるものと考えられ、さらには局所相互作用をモデルとした精密な問題への応用も期待される。

3. 研究の方法

本研究の研究方法は以下の通りである。

(1) 研究打合せ、情報交換、成果発表

本研究課題について共同研究者と詳しい研究打合せを行い、それを基に本研究と関係のある研究者との情報交換を効果的に行い、研究成果の取得を目指す。共同研究者との研究打ち合わせ

の出張，あるいは情報交換，収集のため北海道大学，東北大学，東京大学，大阪大学，広島大学，九州大学で開かれる研究集会，セミナーへの出張を行う．さらに得られた結果は，日本数学会学会，京都大学数理解析研究所研究集会，早稲田大学応用解析研究会，その他，微分方程式の研究集会で講演を行う．

(2) 国際研究活動

海外にて開催される研究集会，セミナーに出席し，非線形移流拡散方程式に関する成果発表及び情報交換を行う．本研究ではアメリカ・カルフォルニア大学サンタバーバラ校及びスロバキア・コメニウス大学の微分方程式セミナーで講演を行った．

(3) その他

研究活動に必要なコンピュータ，文房具の購入．

4. 研究成果

(1) 平成 28-29 年度 多成分空間高次元移流拡散方程式系の解の構造に関する研究

非局所相互作用をもつ移流拡散方程式系の既存の研究が，単成分あるいは2成分であることから，本研究ではその研究対象を粒子の種類数を一般化した N 成分の空間高次元初期値問題として発展させた．この多成分移流拡散方程式系はあるスケール変換のもと，スケール不変性をもつ．そのため藤田-加藤の原理から，対応する不変ノルムとその関数空間上でその時間局所解が期待できる．実際，空間2次元の場合，移流拡散方程式系の解を L^1 空間で考えることは質量保存則が成り立つから，解析上相性が良く， L^1 空間と関数空間上でエネルギー，エントロピー，2次モーメントを解析することで，時間大域解と有限時間爆発解の構造およびその初期値に関する閾値さらには有限時間爆発解の爆発機構が明らかになった．高次元においてもこの移流拡散方程式系の初期値問題は解の正值性保存，解の L^1 保存性，エントロピー有界性が成り立つ．Kurokiba-Ogawa(2016)では，シンプルな空間3次元移流拡散方程式系に対して，2次モーメントの時間発展不等式と情報理論によるShannon不等式の連続版を導出並びに適用して，解が有限時間内に爆発するための初期条件を精密化した．この研究成果をもとに，本研究において， N 個の移流係数と N 個の粒子場係数の符号の組み合わせによる解の構造の分類を研究した．拡散方程式系全体の自由エネルギーは，各成分の粒子系の自由エネルギーに，対応する移流係数と粒子場係数が乗じられた量の総和で表すことができる．それゆえ，それぞれの解が時間大域的に存在するか否かを考察するとき，対応する移流係数と粒子場係数の積の符号，正の移流係数の数と正の粒子場係数の数の大小関係の組み合わせにより，それぞれ派生した初期値問題の解について調べ，対応する問題の時間大域解と有限時間爆発解を求めた．なおこの研究成果については，現在学術論文投稿の活動中である．（小川卓克教授（東北大学）と共同研究）

(2) 平成30年度 退化移流拡散方程式系の有限時間爆発解の研究

速い非線形拡散を与える退化移流拡散方程式の初期値問題の研究に取り組んだ．拡散演算子が未知関数(密度関数)のべき乗に作用する偏微分方程式である．その指数 a は圧縮性Navier-Stokes-Poisson方程式の特異摂動から与えられる断熱指数に相当し，通常は a を1以上と仮定する．他方，porous media型あるいは p -Laplace型退化放物型方程式の初期値問題では，密度関数が大きくなれば，拡散係数が相対的に小さくなるいわゆる高速拡散型の問題となる．

この問題に対してSugiyama-Yahagi(2011)による断熱指数が $1-2/n < a < 1$ の有限時間爆発解の研究がある．研究代表者は近年，線形拡散演算子の空間高次元移流拡散方程式系に対する有限時間爆発解の研究 Kurokiba-Ogawa(2016)を行っており，この高速拡散型に情報理論Shannonの不等式を適用できるのではないかと洞察した．そのShannonの不等式は断熱指数 a に依存した式であり，従来の不等式を拡張した形をとる． $a=1$ のとき，entropyはBoltzmann型となるため，

Shannonの不等式はentropy 汎函数の負値部分を制御する不等式となる．退化型の場合, entropy が密度の a 乗となるため負値部分は存在しないが, $a < 1$ の場合, 数学で扱われるentropyそのものが負になるため, 一般化されたShannonの不等式によって解析を行う．空間高次元移流拡散方程式系の2次のモーメントから断熱指数が $n/(n+2) < a < 1$ で解が有限時間爆発を起こすことが明らかになり, 爆発断熱指数について新しい条件を得ることに成功した．(小川卓克教授(東北大学)と共同研究)

(3) 令和元年度 スケール臨界関数空間上におけるKeller-Segel方程式系と移流拡散方程式の特異極限問題に関する研究

粘菌集合体形成の数理モデルは, Keller-Segel 方程式と呼ばれる二つの放物型偏微分方程式の系で記述される．この研究分野のブレイクスルーとなった1995年のNagaiの研究は, 粘菌の走化性物質の線形放物型方程式の時間発展スケールが粘菌のそれより極めて小さいと考えて導出した, Nagaiモデルと呼ばれる放物型-楕円型偏微分方程式系の数学解析である．本研究の移流拡散方程式系はその多くがNagaiモデルを礎とした放物型-楕円型移流拡散方程式系の数学解析である．したがってKeller-Segel方程式を示す放物型-放物型移流拡散方程式系と放物型-楕円型移流拡散方程式系の数学的相関関係を与えることは重要な研究課題である．高次元空間におけるKeller-Segel方程式系の時間微分項に緩和時間パラメータ を設置した初期値問題を考え, その解の特異極限を考えた．この極限方程式はNagaiモデルなる放物型-楕円型移流拡散方程式系と期待できる．Raczynski(2009) とBiler-Brandolese(2009)の先行研究では空間2次元初期値問題に対してscaling 不変なクラスの小さい初期値の時間大域解に対して, 特異極限が行われた．その収束位相空間は擬測度空間あるいはLorentz空間である．しかし実際に大事な点是对応する二つの初期値問題が大きな初期値のところ解が時間発展爆発することである．本研究では高次元で, 大きな初期値の局所解もふくむ初期値問題に対してscaling 不変な, Serrinの許容指数を持つLebesgue-Bochner空間で, 自然な特異極限の解析に成功した．解析には熱方程式の初期値問題に対する, 一般化された最大正則性を用いて, 臨界空間の設定のまま解の平滑化効果から生じる余剰正則性を用いずに, 漸近収束を証明する．(小川卓克教授(東北大学)と共同研究)

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Masaki Kurokiba, Takayoshi Ogawa	4. 巻 32-6号
2. 論文標題 Finite time blow up for solutions to a degenerate drift-diffusion equation for a fast diffusion case	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Nonlinearity	6. 最初と最後の頁 2073 - 2093
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1088/1361-6544/ab0069	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 4件／うち国際学会 3件）

1. 発表者名 黒木場正城
2. 発表標題 高速拡散型退化移流拡散方程式の解の爆発について
3. 学会等名 日本数学会2019年度年会関数方程式論分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 黒木場正城
2. 発表標題 Singular limit problem for the Keller-Segel system to a drift-diffusion system in critical spaces
3. 学会等名 Seminar on Qualitative Theory of Differential Equations, Comenius University, スロバキア
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masaki Kurokiba
2. 発表標題 Finite time blow up for a solution to system of the drift-diffusion equations
3. 学会等名 Analysis for Nonlinear problems in UCSB (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Masaki Kurokiba
2. 発表標題 Blowing up for a solution to system of the drift-diffusion equations in higher dimensions
3. 学会等名 RIMS研究集会 「発展方程式論とその非線形解析への応用」(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 黒木場正城
2. 発表標題 Blowing up for a solution to system of the drift-diffusion equations in higher dimensions
3. 学会等名 第637回応用解析研究会(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 黒木場正城
2. 発表標題 Blowing up for a solution to system of the drift-diffusion equations in higher dimensions
3. 学会等名 非線形現象の数値シミュレーションと解析2017(招待講演)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----