

令和元年6月3日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05225

研究課題名（和文）優臨界楕円型偏微分方程式に現れる新現象と解析手法の探求

研究課題名（英文）The pursuit of new phenomena and methods for supercritical elliptic PDEs

研究代表者

宮本 安人（Miyamoto, Yasuhito）

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：90374743

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,300,000円

研究成果の概要（和文）：臨界ソボレフ指数と呼ばれる数より大きい増大度を非線形項が持つ場合に、球領域における半線形楕円型偏微分方程式の球対称解の解構造（分岐構造）を明らかにした。解構造は特異球対称解と密接に関係しているため、特異球対称解についても研究を行った。特に、非線形項の主要部が冪か指数関数の場合に、特異球対称解が一意的に存在し、古典解が特異解に収束することを示した。一方、当初の研究計画にはなかったが、主要部が冪や指数関数ではない場合には、藤嶋陽平氏（静岡大学）によって発見された一般化相似変換が有効であることを明らかにし、それをを用いて一般的な非線形項の場合についても解構造のかなりの部分を明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

半線形楕円型偏微分方程式の研究において、非線形項の増大度がソボレフの意味の、劣臨界もしくは臨界の場合には、膨大な量の研究がなされている。一方、優臨界の場合は、有効な関数解析的手法が存在しないため、その解構造や解の性質等は未知の部分が大きかった。

本研究では、球対称解に制限することによって、常微分方程式の手法を用いて解構造や解の様々な性質を明らかにすることが目的である。本研究によって優臨界方程式に特有の現象が明らかにされ、さらに、対応する放物型方程式の研究に有効な様々な手法や情報を提供した。

研究成果の概要（英文）：The structure of the positive solutions of semilinear elliptic equations with supercritical growth in a ball is studied. The solution structure is deeply related to a radial singular solution, and hence it is also studied. When the principal part of the nonlinear term is a pure power function of an exponential function, we show that the classical solution converges to the singular solution in some sense. On the other hand, if the nonlinear term does not have an algebraic growth or an exponential growth, then we found that the generalized similarity transformation, which was found by Professor Fujishima of Shizuoka University, is key to study. Using this transformation, we clarify the solution structure in that case.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：ソボレフ優臨界 半線形楕円型偏微分方程式 分岐図式 正值特異球対称解 一般化相似変換 一般の増大度 Joseph-Lundgren指数 交点数

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

非線形楕円型偏微分方程式の研究手法は、方程式の非線形項の増大度に応じて大きく異なる。一般的に、非線形項の増大度が大きいと非線形性の強さが大きく、解析が困難になる。非線形項の増大度が、臨界ソボレフ指数と呼ばれる指数より小さい場合(劣臨界)と、等しい場合(臨界)は、変分法を用いた研究が数多くなされている。しかし、臨界ソボレフ指数より大きい場合(優臨界)は、変分法が使えないことが知られており、その場合の解構造は、未知の部分が大きかった。一方、優臨界の場合で、球領域上定義された方程式の正值解の完全な解構造が明らかになっている、いくつかの特殊な非線形項が知られている、といった状況であった。その特殊な非線形項の中に、純粋冪の非線形項と、指数関数の非線形項が含まれている。

2. 研究の目的

優臨界楕円型偏微分方程式に対して、球領域上の正值解の構造を明らかにすることが最終的な目的である。この解構造は、特異球対称解と密接に関係することが知られているので、特異球対称解の様々な性質を明らかにすることも目標となる。また、これらの解析に必要な、優臨界の場合に特有の手法を開発することも目標である。

3. 研究の方法

優臨界の場合に、一般の領域における(正值解とは限らない)全ての解の解構造を、完全に決定することは、現在の数学では不可能である。そこで、球領域上の正值解に制限することによって、解の形状を球対称に制限する。常微分方程式の手法と偏微分方程式の手法を組み合わせることによって、解構造の解明を目指す。

4. 研究成果

通常、区間領域における線形化固有値問題といえども、微分作用素が非定数係数の場合は、解が具体的に表示できないことが知られており、従って、固有値や固有関数は一般的な状況では具体的には表示できない。しかし、近年の若狭徹氏(九州工業大学)と四ツ谷晶二氏(龍谷大学)の研究で、非線形項が特殊な場合は、いくつかの方程式でその線形化固有値問題の全ての固有値と固有関数が、具体的に表示できる場合があることが明らかになった。では、その手法を用いて、1次元 Gel'fand 方程式の全ての解における線形化固有値問題を考え、その全ての固有値と固有関数を具体的に表示することに成功した。

では純粋冪を非線形項に持つ(退化した場合を含む)楕円型偏微分方程式の2つ球対称解の交点数を明らかにした。この結果には、指数について技術的な条件が課されていたが、では、用いられている変数変換を改良することによって技術的な条件を取り除き一般的な結果を得た。具体的には、Joseph-Lundgren 指数と呼ばれる指数の一般化に相当する指数を発見し、結果は冪 p が、(i)方程式の冪がその指数以上の場合、(ii)その臨界ソボレフ指数より大きくその指数未満の場合、(iii)臨界ソボレフ指数の場合の、3通りの場合に別れる。まず2つの解が有界な解の場合は(i)のとき交点数が0、(ii)のとき交点数が、(iii)のとき交点数が2となることを示した。2つの解が特異解と有界な解の場合も(i)交点数0、(ii)交点数、(iii)交点数2、となることを示した。これらの結果は、退化していない通常の半線形放物型方程式の場合と同じ結果であるので、半線形の場合の一般化に相当する。この成果は、(特に)優臨界退化楕円型方程式を研究する際に、基本的な解析手法を提供する結果になると思われる。

では、球面上の測地球領域における優臨界 Emden-Fowler 方程式(純粋冪を持つ楕円型方程式)の正值解の構造を明らかにした。具体的には、上記と同様に Joseph-Lundgren 指数が現れ、解構造は、非線形項の指数 p が(i)その指数以上か、(ii)臨界ソボレフ指数より大きくその指数未満かの、2種類に分かれる。(i)(ii)ともに、L ノルムが大きい場合は、古典解が特異解にある意味で収束するが、(ii)の場合は、交点数がとなり、場合によっては古典解が無限に存在することがあり得ることを明らかにした。測地半径が大きい場合には、(i)(ii)ともに古典解は一意的であることも明らかにした。この結果から、球面上の測地球領域の場合は、ユークリッド空間とは異なり、優臨界の場合でも正值解を持つことが明らかになった。一方、(i)の場合は、特異解と古典解の交点数が決定できなかった。また、解構造が十分に明らかにされたとは言えず、今後の課題であることが確認できた。

では指数関数を非線形項に持つ場合、無限個の非球対称特異解を構成した。類似の結果が他の研究者によって得られていたが、証明を見直すことによって大幅に単純化し、その結果証明が短くなった。特異解は古典解全体の解構造と密接な関係があるので、ここで構成した特異解を他の問題に応用できないか模索中である。

では、非線形項の主要部が冪となる球領域上定義された半線形楕円型偏微分方程式に対して、すでに先行研究で構成されていた特異球対称解の一意性を証明した。いくつか特殊な方程式の場合は一意性が既に示されていたが、冪増大する一般的な場合は、この結果が初めてである。また、この特異球対称解における線形化問題を考察した。係数が特異となるため通常の関

数解析的な枠組みには入らず，一般的なスペクトルの理論が使えない状況となる．この問題に対して，新たに，弱固有値を定義し，特異解が“極解”となるための必要十分条件を導いた．一般的な領域の場合は Brezis-Vazquez による「極解であるための必要十分条件は，特異解が安定」といった結果が知られていた．ここで得られた条件は，「球領域の場合，極解であるための必要十分条件は弱固有値が 0 以上」である．

上記は，ある程度，予想された結果であったが，は研究開始時には予想されなかった大きな成果であった．では，非線形項が必ずしも冪や指数関数とならない一般の増大度を持つ方程式の場合に，球領域における特異球対称解を構成し，上記のとと同様に，2つの球対称解の交点数を明らかにした．また，それを応用して，特異解のモース指数を計算し，正值解の構造を明らかにした．その研究の過程で，藤嶋陽平氏（静岡大学）によって発見された一般化スケール変換（疑相似変換）が極めて有効であることが分かり，このスケール変換による極限方程式を導いた．特に，この極限方程式が別の技巧的な変数変換によって，純粋冪か指数関数のどちらかに変換されるという著しい性質を持つことを明らかにした．これによって，任意の増大度を持つ方程式であっても，冪か指数関数のどちらかに，本質的に帰着できることが明らかになった．

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計7件)

Miyamoto Yasuhito; Wakasa Tohru, Exact eigenvalues and eigenfunctions for a one-dimensional Gel'fand problem. J. Math. Phys. 60 (2019), no. 2, 021506, 11 pp. (査読有り)

Kosaka Atsushi; Miyamoto Yasuhito, The Emden-Fowler equation on a spherical cap of S^n . Nonlinear Anal. 178 (2019), 110-132. (査読有り)

Miyamoto Yasuhito; Naito, Yuki, Singular extremal solutions for supercritical elliptic equations in a ball. J. Differential Equations 265 (2018), no. 7, 2842-2885. (査読有り)

Miyamoto Yasuhito, Infinitely many non-radial singular solutions of $u + e^u = 0$ in \mathbb{R}^N , $4 \leq N \leq 10$. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 148 (2018), no. 1, 133-147. (査読有り)

Miyamoto Yasuhito, A limit equation and bifurcation diagrams of semilinear elliptic equations with general supercritical growth. J. Differential Equations 264 (2018), no. 4, 2684-2707. (査読有り)

Miyamoto Yasuhito; Takahashi, Kazune, Generalized Joseph-Lundgren exponent and intersection properties for supercritical quasilinear elliptic equations. Arch. Math. (Basel) 108 (2017), no. 1, 71-83. (査読有り)

Miyamoto Yasuhito, Intersection properties of radial solutions and global bifurcation diagrams for supercritical quasilinear elliptic equations, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 23 (2016), no. 2, Art. 16, 24 pp. (査読有り)

〔学会発表〕(計27件)

Y. Miyamoto, Exact eigenvalues and eigenfunctions for a one-dimensional Gel'fand problem, Journee d'Analyse Non Lineaire, Universite de Paris-Sus (France), Sep. 21, 2018.

Y. Miyamoto, A limit equation and bifurcation diagram for semilinear elliptic equations with general supercritical growth, The 12th AIMS conference, National Taiwan University (Taiwan), July 5, 2018.

Y. Miyamoto, Structure of the positive radial solutions for the supercritical Neumann problem $-\Delta u - u^p = 0$ in a ball, Equadiff2017, Slovak University of Technology (Slovakia), July 25, 2017.

Y. Miyamoto, Structure of the positive radial solutions for the supercritical Neumann problem $-\Delta u - u^p = 0$ in a ball, International Workshop on Nonlinear Analysis and Reaction-Diffusion Equations, Jianguo Univ. (China), July 5, 2017.

Y. Miyamoto, A limit equation and bifurcation diagram for semilinear elliptic equations with general supercritical growth, 2017 International Workshop on Nonlinear PDE and Applications, KAIST (Korea), March 30, 2017.

(他22件)

6. 研究組織

(2)研究協力者

研究協力者氏名：内藤 雄基
ローマ字氏名：(Naito Yuki)

研究協力者氏名：若狭 徹
ローマ字氏名：(Wakasa Tohru)

研究協力者氏名：小坂 篤志
ローマ字氏名：(Kosaka Atsushi)

研究協力者氏名：高橋 和音
ローマ字氏名：(Takahashi Kazune)

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。